F25-T2-A4

Sei G eine Gruppe der Ordnung $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ und seien $U_5, U_5' \subseteq G$ zwei verschiedene 5-Sylow-Gruppen von G.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der 5-Sylowgruppen von G.

b) Sei U die von (den Elementen von) U_5 und U_5' erzeugte Untergruppe von G. Zeigen Sie $U = G$. *Hinweis*: Wie viele 5-Slyow-Gruppen kann eine echt zwischen U_5 und G liegende Untergruppe haben?

Lösung

a) Nach dem 3. Sylowsatz gilt für die Anzahl der 5-Slyow-Gruppen von G, n_5, dass

$$n_5 \equiv 1 (\bmod 5); \quad n_5 \mid 3^4 = 81.$$

Demnach bleibt von den Möglichkeiten $n_5 \in \{1, 3, 9, 27, 81\}$, nur $n_5 = 81$, denn 3,9 und 27 haben nicht Rest 1 bei Division durch 5 und nach Angabe gibt es mindestens 2.

b) Wir beantworten zunächst die Frage aus dem Hinweis. Sei also $U_5 \subsetneq H \subsetneq G$ eine Untergruppe von G. Nach Lagrange gilt also $|U_5| \mid |H|$ und $|H| \mid |G|$, wobei $|U_5| < |H| < |G|$. Da U_5 eine 5-Sylow-Gruppe ist, gilt $|U_5| = 5^2 = 25$. Wir erhalten also $|H| = 5^2 \cdot 3^k$ mit $k \in \{1, 2, 3\}$. Mit der selben Rechnung wie oben, bleibt uns nur $\widehat{n}_5 = 1$ für die Anzahl der 5-Sylow-Gruppen von H. Angenommen $U \subsetneq G$. Dann wäre U eine Untergruppe von G, die echt zwischen U_5 und G liegt (weil $U_5 \cap U_5' \supsetneq \{1\}$). Nach dem Hinweis dürfte U also nur eine 5-Sylow-Gruppe beinhalten, sie enthält aber U_5 und U_5'. Daraus folgern wir, dass $U = G$ (denn $U \subset G$ ist klar).