F25-T3-A4

Für $a \in \mathbb{Z}$ sei $f_a = X^4 + aX^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Mit $\mathrm{Gal}(f_a)$ werde im Folgenden die Galois-Gruppe des in $\mathbb{C}$ enthaltenden Zerfällungskörpers vpn f_a über $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

a) Finden Sie ein $a \in \mathbb{Z}$, sodass die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(f_a)$ nur aus der Identität besteht.

b) Finden Sie ein $a \in \mathbb{Z}$, sodass die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(f_a)$ nur aus der Identität und der komplexen Konjugation besteht.

c) Bestimmen Sie den Isomorphietyp der Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(f_a)$ im Fall $a = -1$.

Lösung Wir berechnen zunächst allgemein die Nullstellen von f_a. f_a ist ein biquadratisches Polynom, daher substituieren wir $Y = X^2$ und erhalten $f_a(Y) = Y^2 + aY + 1$. Nach der quadratischen Lösungsformel, erhalten wir also

$$Y_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Rücksubstitution ergibt die folgenden Nullstellen:

$$X_1 = \sqrt{Y_1}, X_2 = -X_1, X_3 = \sqrt{Y_2}, X_4 = -X_3.$$

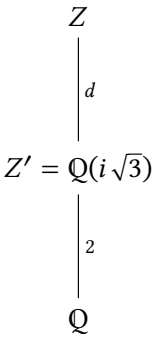
a) Zunächst benötigen wir ein $a \in \mathbb{Z}$, sodass X_i für alle $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ rationale Zahlen sind. Für $a = -2$ gilt $Y_{1,2} = 1$ und demnach sind die Nullstellen von f_{-2} 1 bzw. -1. Das liefert eine triviale Galoisgruppe.

b) Für $a = 2$ sind die Nullstellen von $f_2(X)$ die komplexen Zahlen $\pm i$. Dies liefert die gewünschte Galoisgruppe.

c) Für $a = -1$ sind die Nullstellen von $f_{-1}(X)$ gleich $X_1 = \sqrt{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}, X_2 = -X_1, X_3 = \sqrt{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}, X4 = -X_3$. Andereseits sind die Nullstellen von $f_{-1}(Y)$ mit $Y = X^2$ die folgenden

$$Y_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, Y_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Für $g_{-1}(X) = X^2 - aX + 1$ kennen wir also auch die Nullstellen (das sind die selben, wie die von $f_{-1}(Y)$. Sei nun Z der Zerfällungskörper von $f_{-1}(X)$ und Z' der Zerfälungskörper von $g_{-1}(X)$. Man sieht leicht, dass $Z' = \mathbb{Q}(i\sqrt{3})$. Dann haben wir die folgende Situation:



Es gilt weiter $X_1 X_3 = 1$. Demnach gilt $Z = Z'(X_1)$. Das Minimalpolynom von X_1 über $Z'[X]$ ist $X^2 - Y^1$, denn $X_1 \notin Z'$. Demnach ist $d = 2$ und die Galoisgruppe hat 4 Elemente. Demnach kann $\mathrm{Gal}(f_{-1})$ nur isomorph zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sein. Wir berechnen nun explizit die Galoisgruppe. Wir können den Körpertrum in zwei Schritten nach oben gehen, im ersten haben wir zwei Möglichkeit $i\sqrt{3} \mapsto \pm i\sqrt{3}$. Im zweiten Schritt müssen wir X_1 abbilden. Angenommen wir haben im ersten Schritt $i\sqrt{3}$ auf sich selbst geschickt. Dann bleiben die Möglichkeiten $X_1 \mapsto \pm X_1$. Sollten wir im ersten Schritt $i\sqrt{3}$ auf $-i\sqrt{3}$ geschickt haben (nennen wir diese Abbildung τ, und sei $X^2 - Y_1$ das Minimalpolynom von X_1 in $Z'[X]$, dann können wir X_1 nach Satz A' (Hien: Algebra) nur auf Nullstellen von $(X^2 - Y_1)^\tau = (X^2 - Y_2)$ schicken also auf X_3 oder X_4. Alle diese Galoiselemente haben maximal Ordnung 2. Demnach ist der Isomorphietyp von $\mathrm{Gal}(f_a) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.