F24-T2-A2

Es sei $N = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0$ mit $a_i \in \{0, \dots, 9\}, a_{n-1} \neq 0$ die dezimale Zifferndarstellung einer natürlichen Zahl N.

a) Die *Wechselsumme* von N ist durch

$$W(N) = \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^i a_i$$

gegeben. (Beispiel: $W(123456) = 6 - 5 + 4 - 3 + 2 - 1$).
Zeigen Sie: Es ist N genau dann durch 11 teilbar, wenn $W(N)$ durch 11 teilbar ist.

b) Wir nennen N *palindromisch*, wenn die Ziffernzahl n gerade ist und

$$a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0 = N = a_0a_1\dots a_{n-2}a_{n-1}$$

gilt. (Beispiel: 493394 ist palindromisch.)
Bestimmen Sie alle palindromischen Primzahlen.

c) Sei dei Folge (U_n) mit $U_1, U_2 = 11, U_3 = 111, U_4 = 1111, \dots$ gegeben.
Zeigen Sie:

i) Im Fall $k \mid n$ gilt $U_k \mid U_n$.

ii) Ist $n = k \cdot l$ mit $k, l \in \{2, 3, 4, \dots\}$, so ist U_n keine Primzahl.

Lösung

a) Gilt $11 \mid k$ so gilt $k \equiv 0 \bmod 11$ und umgekehrt. Rechnen wir also in $R = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. In R gilt, dass $[10] = [-1]$. Da $N = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0 = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot (10)^i$ gilt in R:

$$[N] = \sum_{i=0}^{n-1} [a_i \cdot (-1)^i].$$

Hieraus folgert man direkt, dass $[N] = [0] \Leftrightarrow [W(N)] = [0]$. Das zeigt unsere Behauptung.

b) Wir bemerken zunächst, dass jede palindromische Zahl N Wechselsumme $W(N) = 0$ hat. 0 ist durch 11 teilbar, nach a) ist also auch N durch 11 teilbar, daher ist 11 die einzige palindromische Primzahl.

c) i) Wir betrachten k mit $k \mid n$. Es gibt also ein $l \in \mathbb{N}$ sodass $n = k \cdot l$. Wir bemerken dann folgendes:

$$U_k = \sum_{i=0}^{k-1} 10^i$$

und somit

$$U_n = \sum_{i=0}^{kl-1} 10^i = U_k + \sum_{i=k}^{kl-1} 10^i = U_k + 10^k \cdot \sum_{i=0}^{k(l-1)-1} 10^i = \dots$$

Im Endeffekt macht man diesen Schritt l mal und sieht

$$U_n = U_k + 10^k(U_k + 10^k(U_k + 10^k \cdot \dots \quad \text{(das hört nach } l \text{ Schritten auf!)}$$

Mit dem Distributivgesetzt folgert man schnell, dass $U_n \equiv 0 \bmod U_k$ gilt.

ii) $U_k \mid U_n$ nach Teil i) daher ist U_n nicht prim, da $U_k \mid U_n$ und $U_l \mid U_n$, wobei $U_k, U_l \neq 1$ gilt.