F24-T3-A4

a) Seien K ein Körper und $f \in K[X]$ ein irreduzibles separables Polynom über K. Begründen Sie, warum die Ordnung der Galoisgruppe von f über K durch den Grad von f teilbar ist.

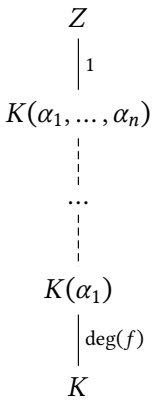
b) Geben Sie ein Beispiel an, wieso die Aussage in a) im Allgemeinen falsch wird, wenn f nicht mehr als irreduzibel vorausgesetzt wird.

c) Begründen Sie, warum es zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ eine Galoiserweiterung $E|F$ von Körpern E, F gibt, deren Galoisgruppe die Ordnung n hat.

d) Zeigen Sie, dass die Aussage in c) im Allgemeinen falsch wird, wenn der Körper F fest vorgegeben wird.

Lösung

a) Sei Z der Zerföllungskörper von f über K und $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ die paarweise verschiedenen Nullstellen (f separabel) von f. Dann ist $Z = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Da f irreduzibel ist, ist oBdA (durch führenden Koeffizienten teilen) f das Minimalpolynom von $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ und da f separabel ist, ist demnach $Z|K$ separabel. Es gilt daher mit $\mathrm{Gal}(f) = \mathrm{Gal}(Z|K)$, dass $\#\mathrm{Gal}(f) = [Z : K]$. Da f oBdA das Minimalpolynom aller α_i über K war haben wir folgende Situation:



Nach der Gradformel gilt also $\deg(f) \mid [Z : K] = \#\mathrm{Gal}(f)$.

b) Wir betrachten $K = \mathbb{Q}$, $Z = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ und $f = (X^3 - 2)(X - 1)$. Es gilt $\mathrm{Gal}(f) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ aber $\deg(f) = 3$. Dazu versichert man sich, dass $Z = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ der Zerfällungskörper von f ist (Übung!) und berechnet mit Hilfe von Satz A die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3})|\mathbb{Q}) = \mathrm{Gal}(f)$.

c) Wir wählen $E = \mathbb{F}_p$ für eine Primzahl p. Wir fixieren jetzt einen algebriaschen Abschluss von $\mathbb{F}_p$ und nennen diesen Ω. Jetzt gibt es genau einen Körper mit p^n Elementen, nämlich $E \subset F = \mathbb{F}_{p^n} \subset \Omega$. Die Theorie über endliche Körper sagt nun, dass $\mathrm{Gal}(E|F) = \langle \mathrm{Frob} \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gilt.

d) Wählen wir $F = \mathbb{F}_2$ so gibt es gar keinen echten Teilkörper.