H24-T1-A5

a) Zeigen Sie: Ist L/K eine Körpererweiterung vom Grad 2 und ist $\mathrm{char}(K) \neq 2$, so ist L/K eine Galoiserweiterung.

b) Geben Sie begründet eine Körpererweiterung L/K vom Grad 2 an, die nicht galoisch ist.

c) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ eine Körpererweiterung $K/\mathbb{Q}$ vom Grad n an, die nicht galoisch ist und geben Sie für Ihre Beispiele die Anzahl der Körperautomorphismen von K an. Begründen Sie dabei Ihre Aussagen.

Lösung

a) Wir zeigen zunächst, das L/K normal ist. Sei dazu $f \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom und $\alpha \in L$ eine Nullstelle von f. Es gilt

$$\deg(f) = [K(\alpha) : K] \leq [L : K] = 2.$$

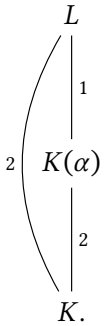
Angenommen $\deg(f) = 1$, dann wäre $\alpha \in K$ und demnach hätte f eine Nullstelle in K.In diesem Fall sind also alle Nullstellen von f in bereits in K und somit auch in L. Im Fall $\deg(f) = 2$ ist f oBdA von der Form

$$f = X^2 + aX + b,$$

mit $a, b \in K$. Sei nun β die zweite Nullstelle von f. Wir wollen nun zeigen, dass $\beta \in L$. Hierzu beobachtet man

$$f = (X - \alpha)(X - \beta) = X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha\beta = X^2 + aX + b.$$

Mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs erhält man, $a = \alpha + \beta$ und $b = \alpha\beta$. Man sieht also $\beta = a - \alpha \in L$, da $a, \alpha \in L$. Zeigen wir weiter, dass L/K separabel ist. Da $[L : K] = 2$ gilt, gibt es ein $\alpha \in L - K$. Wir betrachten wie oben das Minimalpolynom von α über K, welches dann Grad 2 haben muss (vgl. oben). Man sieht nun, dass $L = K(\alpha)$, denn



Um also zu zeigen, dass L/K separabel ist, reicht es aus, dass das Polynom f, welches ja das Minimalpolynom von α über K ist, separabel ist. Sei also wieder f von der Form $f = X^2+aX+b$. Betrachten wir die formale Ableitung $f' = 2X + a$. Da char$K \neq 2$ ist $f' \neq 0$. Wir zeigen nun noch, dass $\text{ggT}(f, f') = 1$ gilt. Dazu führt man Polynomdivision durch und erhält

$$X^2 + aX + b = (\frac{1}{2}X + \frac{1}{4}a) \cdot (2X + a) + b - \frac{1}{4}a^2.$$

Kann man nun zeigen, dass $b - \frac{1}{4}a^2 \in K^\times$ liegt, so folgt, dass $\text{ggT}(f, f') = 1$. Hierzu benutzt man die Lösungsformel für quadratische Gleichung (char$(K) \neq 2$) und die Tatsache, dass f in K keine Nullstellen besitzt (da ja irreduzibel). Demnach muss die Diskriminante $a^2 - 4b < 0$ sein. Man erhält daraus schnell, dass $b - \frac{1}{4}a^2 > 0$ und demnach eine Einheit ist. Das zeigt, dass f keine doppelte Nullstelle hat und demnach, L/K separabel ist.

b) Da jede Körpererweiterung vom Grad 2 normal ist, müssen wir eine Körpererweiterung eines Körpers K finden die nicht separabel ist, demnach muss $\text{char}(K) = 2$ gelten. Wir betrachten daher die Erweiterung die durch den Ringhomomorphismus

$$\phi : \mathbb{F}_2(t) \to \mathbb{F}_2(w), \quad \frac{f(t)}{g(t)} \mapsto \frac{f(w^2)}{g(w^2)}$$

gegeben ist. Beachte dabei, da $\mathbb{F}_2(t)$ ein Körper ist, dass ϕ injektiv ist und deshalb ist dadurch eine Körpererweiterung gegeben. Zeigen wir weiter, dass diese vom Grad 2 ist. Betrachte dazu das Polynom $f = (X - w)^2 = X^2 - w^2 \in \mathbb{F}_2(w)[X]$. Wir zeigen weiter, dass $\mathbb{F}_2(w)$ der Zerfällungskörper von f ist. Mit der obigen Überlegung, also $f = X^2 - w^2 = (X - w)^2$, sieht man, dass f in $\mathbb{F}_2(w)$ in Linearfaktoren zerfällt. Da zudem w die einzige Nullstelle von f ist, folgt die Behauptung. Wir zeigen weiter, dass $\mathbb{F}_2(t)/\mathbb{F}_2(w)$ vom Grad 2 ist. Dazu bemerkt man, dass $t \in \mathbb{F}_2[t]$ prim ist, deshalb ist $X^2 - t$ nach dem Eisensteinkriterium in $\mathbb{F}_2[t][X]$ irreduzibel ist und nach dem Satz von Gauss auch in $\mathbb{F}_2(t)[X]$. Demnach ist f das Minimalpolynom von $w \in L$ über K und deshalb $[\mathbb{F}_2(t) : \mathbb{F}_2(w)] = 2$. Da jedoch w die einzige Nullstelle von f ist, gilt $\text{Gal}(f) = \{\text{id}\}$. Demnach stimmen Körpergrad und Separabilitätsgrad nicht überein. Also ist $\mathbb{F}_2(t)/\mathbb{F}_2(w)$ nicht separabel und deshalb nicht galoisch.

c) Wir bezeichnen mit ζ_n für $n \geq 3$ eine $n - te$ primitive Einheitswurzel. Weiter definieren wir $f_n := X^n-2 \in \mathbb{Q}[X]$. Demnach ist f_n irreduzibel nach Eisenstein $(p = 2)$ in $\mathbb{Q}[X]$. Wir definieren $K_n := \mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$. Demnach ist $[\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2} : \mathbb{Q}] = \deg(f) = n$, da f_n das Minimalpolynom von $\sqrt[n]{2}$ über $\mathbb{Q}$ ist. Jedoch ist $K/\mathbb{Q}$ nicht normal, da ζ_n nicht in K liegt, und demnach auch nicht alle Nullstellen von f_n.