H24-T1-A4

a) Sei $K/\mathbb{Q}$ eine Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass jeder Körperautomorphismus von K ein $\mathbb{Q}-$ Automorphismus ist.

b) Sei K eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ und sei $\phi : K \to K$ ein Körperhomomorphismus. Zeigen Sie, dass ϕ bijektiv ist.

c) Geben Sie eine Körpererweiterung K von $\mathbb{Q}$ und einen Körperhomomorphismus $\phi : K \to K$ an, der nicht bijektiv ist. Begründen Sie dabei Ihre Aussagen.

Lösung

a) Sei $q = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}_+$ beliebig mit $\text{ggT}(x, y) = 1$ (vollständig gekürzt!). Dann ist $q = xy^{-1}$ mit $x, y \in \mathbb{N} - \{0\}$. Es gilt $x = x \cdot 1 = \underbrace{1_{\mathbb{Z}} + \cdot + 1_{\mathbb{Z}}}_{\text{x - mal}}$. Analoges gilt für y. Da $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset K$ gilt $1_{\mathbb{Z}} = 1_{\mathbb{Q}} = 1_K = 1$. Sei nun $\sigma \in \text{Aut}(K)$, dann gilt $\sigma(1) = 1$. Demnach gilt

$$\sigma(q) = \sigma(xy^{-1}) = \sigma(x)\sigma(y^{-1}) = \sigma(\underbrace{1 + \ldots 1}_{\text{x - mal}})(\sigma(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{\text{y - mal}}))^{-1} = x\sigma(1)(y\sigma(1))^{-1} = xy^{-1} = q.$$

Für alle $p \in \mathbb{Q}_-$ nutzt man, dass es ein eindeutiges $q \in \mathbb{Q}_+$ gibt, sodass $p + q = 0$. Da $\sigma(0) = 0$ gelten muss, folgt auch $\sigma(p) = -\sigma(q) = -q = p$.

b) Da wir in a) nur benutzt haben, dass σ ein Körperhomomorphismus ist, gilt $\phi_{|\mathbb{Q}} = \text{id}_{\mathbb{Q}}$. Da Körperhomomorphismen stets injektiv sind, bleibt die Surjektivität von ϕ zu zeigen. Dazu wollen wir den Rangsatz der linearen Algebra nutzen. Wir fassen dazu K also $\mathbb{Q}-$ Vektorraum auf und da $\phi_{|\mathbb{Q}} = \text{id}_{\mathbb{Q}}$ ist ϕ also ebenfalls eine lineare Abbildung. Sei nun $[K : \mathbb{Q}] = n$ der Körpergrad. Dann gilt nach dem Rangsatz:

$$n = \dim(\ker(\phi)) + \dim(\text{im}(\phi)) = \dim(\text{im}(\phi)).$$

Also ist ϕ auch surjektiv.

c) Nach b) dürfen wir keine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ nehmen. Daher probieren wir die Erweiterung $\mathbb{Q}(t)/\mathbb{Q}$. Wir betrachten den Körperhomomorphis, der durch das Polynom t^2 induziert wird. Also

$$\phi : \mathbb{Q}(t) \to \mathbb{Q}(t), f(t) \mapsto f(t^2).$$

Man prüft leicht nach, dass ϕ ein Körperhomomorphismus, der jedoch nicht surjektiv ist, da $t \notin \text{im}(\phi)$.