Gewöhnliche Differentialgleichungen

Vorlesungsmitschrift

Version: 12. Februar 2018

Lisa Beck
Wintersemester 2016/17

Universität
Augsburg
University

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **5**
1.1 Grundbegriffe . . . 5
1.2 Klassische Fragestellungen . . . 12
1.3 Erste Anwendungsbeispiele . . . 13
1.4 Bemerkungen zu der geometrischen Interpretation von gewöhnlichen Differentialgleichungen 18

2 Elementare Lösungsmethoden für spezielle Gleichungen **21**
2.1 Separation der Variablen . . . 21
2.2 Skalare lineare Gleichungen erster Ordnung . . . 26
2.3 Reduktionsverfahren von d'Alembert . . . 30
2.4 Exakte Differentialgleichungen . . . 32
2.5 Potenzreihenansatz . . . 38
2.6 Variablentransformationen . . . 40

3 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen **45**
3.1 Näherungslösungen . . . 45
3.2 Der Satz von Peano . . . 49
3.3 Der Satz von Picard–Lindelöf . . . 55
3.4 Abhängigkeit der Lösung von den Daten . . . 66

4 Systeme linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen **71**
4.1 Allgemeine Theorie . . . 71
4.2 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten . . . 78
4.3 Lineare Systeme mit analytischen Koeffizienten . . . 89

5 Autonome Differentialgleichungen **91**
5.1 Allgemeine Theorie . . . 91
5.2 Ebene autonome Systeme . . . 97
5.3 Lineare ebene autonome Systeme . . . 104

6 Stabilitätstheorie **111**
6.1 Grundbegriffe . . . 111
6.2 Stabilität linearer Systeme . . . 115
6.3 Linearisierte asymptotische Stabilität . . . 118
6.4 Ljapunovfunktionen und die direkte Methode . . . 121

Literatur **129**

Kapitel 1

Einleitung

Diese Vorlesung bietet eine Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Es handelt sich hierbei um Gleichungen, die eine oder mehrere (unbekannte) Funktionen in einer Variablen mit einigen ihrer Ableitungen in Relation setzt. Der Begriff *gewöhnlich* bezieht sich hierbei auf die Tatsache, dass die Funktionen lediglich durch *eine* unabhängige Variable beschrieben werden, und man spricht von partiellen Differentialgleichungen, wenn mehrere unabhängige Variablen (und dann partielle Ableitungen in den Differentialgleichungen) involviert sind. Da über Differentialgleichungen insbesondere Änderungsverhalten von Größen miteinander in Relation gesetzt werden können, lassen sich viele Phänomene der Natur-, Sozial- oder Wirtschaftswissenschaften (zumindest näherungsweise) in Form solcher Gleichungen beschreiben, etwa in der Physik (Bewegungsgesetze wie die Newtonschen Bewegungsgleichungen oder Schwingungsgleichungen), Astronomie (Himmelsmechanik), Meteorologie (Wettermodellierung), Chemie (Zerfallsraten), Biologie (Modelle für das Wachstum von Populationen, aus der Epidemiologie und der Genetik) und Ökonomie (Finanzmarktmodelle). Aus diesem Grund spielen Differentialgleichungen historisch gesehen in der Mathematik bereits seit einigen hundert Jahren eine große Rolle (und gaben wichtige Impulse für die Entwicklung der Differential- und Integralrechnung). Viele berühmte Mathematiker wie etwa Newton, Leibniz, Bernoulli, d'Alembert oder Euler haben Beiträge geliefert, und seit dem 19. Jahrhundert wurde die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen systematisch und mathematisch rigoros entwickelt. In dieser Einleitung werden wir zunächst einige grundlegende Definitionen geben und erste Beispiele gewöhnlicher Differentialgleichungen kennenlernen.

1.1 Grundbegriffe

Zunächst führen wir allgemeine gewöhnliche Differentialgleichungen und den Lösungsbegriff formal ein.

Definition 1.1. *Seien k, $N \in \mathbb{N}$, $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^{1+(k+1)N}$ eine Menge und $g\colon \tilde{D} \to \mathbb{R}^N$ eine gegebene Funktion. Eine (zunächst formal definierte) Gleichung der Form*

$$g(t, u, u', \ldots, u^{(k)}) = 0 \tag{1.1}$$

in den Variablen $t \in \mathbb{R}$ und $u, u', \ldots, u^{(k)} \in \mathbb{R}^N$ nennt man eine (implizite) gewöhnliche Differentialgleichung. *Die Menge $\tilde{D}$ heißt dabei der* Definitionsbereich *der Differentialgleichung, die Funktion g nennt man die* Strukturfunktion*, und die Zahl k bezeichnet man als die* Ordnung *der Differentialgleichung sowie N als die* Dimension *der Differentialgleichung.*

Bemerkungen 1.2.

(i) *Hier wurde angenommen, dass die Dimension des Vektors der Variablen $u, u', \ldots, u^{(k)}$ (die wir gleich als die Anzahl der unbekannten Funktionen ansehen werden) der Anzahl der Gleichungen entspricht. Einerseits ist dies der relevante Fall für eine zufriedenstellende Theorie (in Analogie zu Gleichungssystemen aus der linearen Algebra würde man sonst typischerweise unter- bzw.*

überbestimmte Systeme betrachten), andererseits kann man durch das Hinzufügen von unbenötigten Vektoreinträgen bzw. Gleichungen stets auf diesen Fall reduzieren.

(ii) *Im Fall $N = 1$ spricht man einfach von einer gewöhnlichen Differentialgleichungen, wohingegen man im Fall $N > 1$ von einem* System *gewöhnlicher Differentialgleichungen spricht.*

(iii) *Allgemeiner könnte man gewöhnliche Differentialgleichungen auch auf normierten Räumen definieren (da normierte Räume noch genügend Struktur besitzen, um Differentiale zu betrachten). Für uns von Interesse ist jedoch nur der Fall, dass wir mit komplexen Zahlen anstelle von reellen Zahlen arbeiten, also ein Definitionsgebiet $\tilde{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{(k+1)N}$ betrachten (was man mit der Identifikation $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ als Menge in $\mathbb{R}^{1+2(k+1)N}$ verstehen kann).*

(iv) *Wenn die Strukturfunktion g nicht von der höchsten Ableitung $u^{(k)}$ abhängt, so ist die Differentialgleichung (1.1) nur formal von k-ter Ordnung und man kann sie äquivalent als eine Gleichung der Ordnung $k-1$ schreiben. Die* echte *Ordnung der Gleichung sollte man daher definieren als das Minimum der formalen Ordnungen aller äquivalenten Differentialgleichungen.*

Definition 1.3. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine k-fach differenzierbare Funktion $u\colon I \to \mathbb{R}^N$ heißt* Lösung *der gewöhnlichen Differentialgleichung (1.1) (unter den Voraussetzungen der Definition 1.1), falls $(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(k)}(t)) \in \tilde{D}$ für alle $t \in I$ gilt und*

$$g(\cdot, u, u', \dots, u^{(k)}) = 0 \qquad \text{in } I$$

erfüllt ist. Das Intervall I nennt man das zur Lösung u gehörige Lösungs- *oder* Existenzintervall, *und der Graph $\{(t, u(t))\colon t \in I\}$ von u heißt auch* Lösungskurve *oder* Integralkurve. *Ferner bezeichnet man als* allgemeine Lösung *der gewöhnlichen Differentialgleichung (1.1) eine Funktion, die neben t in der Regel noch von weiteren Parametern abhängt, so dass man zum einen für jede beliebige Wahl dieser zusätzlichen Parameter eine Lösung von (1.1) erhält (für die das zugehörige Existenzintervall dann auch von der Wahl der Parameter abhängen darf) und dass andererseits jede beliebige Lösung von (1.1) so dargestellt werden kann.*

Bemerkungen 1.4.

(i) *Damit der Differentiationsbegriff sinnvoll ist, verstehen wir unter einem* Intervall *stets ein Intervall mit nicht-leerem Inneren.*

(ii) *Falls $a \in \partial I \cap I$ ein zum Intervall gehörender Randpunkt ist, so versteht man $u^{(j)}(a)$, $j \in \{1, \dots, k\}$, als einseitige Ableitung (ohne dass wir das künftig explizit erwähnen). Meist werden wir uns der Einfachheit halber in dieser Vorlesung auf offene Intervalle beschränken.*

(iii) *Die Notation $t \in I$ für die unabhängige Variable ist gebräuchlich, da man sie häufig als Zeitvariable interpretiert. Manchmal wird anstelle von $u(t)$ die Notation $x(t)$ (oder auch $y(x)$) für die Lösung verwendet, und dies ist insbesondere dann der Fall, wenn physikalische Modelle betrachtet werden und die abhängige Variable als Ortskoordinatenvektoren interpretiert werden (und manchmal schreibt man auch $\dot{x}$ anstelle von x').*

Wir werden uns im Laufe der Vorlesung mit einigen expliziten Beispielen von gewöhnlichen Differentialgleichungen beschäftigen und dabei insbesondere auch das Aufstellen der Gleichungen motivieren. Nicht alle Phänomene, die Änderungsverhalten von Größen miteinander in Relation setzen, lassen sich jedoch als Differentialgleichungen im Sinne der Definition 1.1 formulieren. Beispielsweise könnte die Änderung eines Zustandes u von deren Wert zu einem früheren Zeitpunkt (oder einem Mittelwert der früheren Werte) abhängen, wie etwa in der Gleichung

$$g(t, u(t-\tau), u'(t)) = 0$$

(mit $\tau > 0$ einem Verzögerungsparameter). In diesem Fall spricht man von einer *Differentialgleichung mit verzögertem Argument*. Derartige Phänomene treten in den Wirtschafts- bzw. Gesellschaftswissenschaften auf (etwa bei der Entwicklung der Studentenzahlen) oder in den Materialwissenschaften (Materialien mit Gedächtnis, Hystereseeffekte).

Die in Definition 1.1 behandelten gewöhnlichen Differentialgleichungen sind dennoch von sehr allgemeiner Form, und für die konkrete Untersuchung der Gleichung und möglicher Lösungen, ist es zielführend, sich Gleichungen von etwas speziellerer Struktur anzuschauen. Dass gerade der Nachweis von Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen für allgemeine implizite gewöhnliche Differentialgleichungen schwierig oder gar unmöglich ist, kann man sich bereits an einfachen Beispielen überlegen.

Beispiele 1.5.

(i) *Die Strukturfunktion* $g_1 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *sei gegeben durch* $g_1(t,u,u') := 1+(u')^2$. *Die zugehörige implizite gewöhnliche Differentialgleichung*

$$1 + (u'(t))^2 = 0 \qquad \text{in } I$$

besitzt offensichtlich auf keinem offenem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ *eine Lösung, da schon die Gleichung* $1 + (u')^2 = 0$ *keine Lösung* $u' \in \mathbb{R}$ *erlaubt.*

(ii) *Die Strukturfunktion* $g_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *sei gegeben durch* $g_2(t,u,u') := u^2 + (u'-1)^2$. *Auch die zugehörige implizite gewöhnliche Differentialgleichung*

$$(u(t))^2 + (u'(t) - 1)^2 = 0 \qquad \text{in } I$$

besitzt auf keinem offenem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ *eine Lösung. Die Gleichung* $u^2 + (u'-1)^2 = 0$ *besitzt zwar die Lösung* $(u,u') = (0,1)$, *aber diese Forderungen führen auf die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen*

$$u(t) = 0 \qquad \text{und} \qquad u'(t) = 1\,,$$

die nicht simultan erfüllt werden können.

(iii) *Die Strukturfunktion* $g_3 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *sei gegeben durch* $g_3(t,u,u') := (u')^2 - 1$. *Die implizite gewöhnliche Differentialgleichung*

$$(u'(t))^2 - 1 = 0 \qquad \text{auf } \mathbb{R}$$

besitzt zwei Lösungsfamilien, nämlich $u_1(t) := x_0 - t$ *sowie* $u_2(t) := x_0 + t$ *für beliebiges* $x_0 \in \mathbb{R}$.

Dass man keine allgemeine gute Lösungstheorie für implizite gewöhnliche Differentialgleichungen erwarten kann, liegt im Wesentlichen darin begründet, dass man die Gleichungen im Allgemeinen nicht nach der höchsten Ableitung auflösen kann. Dies ist insbesondere bereits dann der Fall, wenn man Gleichungen "nullter Ordnung" der Form $g(t,u) = 0$ für eine beliebige vorgegebene Strukturfunktion g betrachtet: eine Lösung findet man in diesem Fall offensichtlich genau dann, wenn man die Gleichung nach u auflösen kann. Auch bei Beispiel 1.5 (i) ist die Auflösbarkeit (nun nach der Ableitung u') gerade nicht der Fall und damit die Existenz einer Lösung ausgeschlossen. Die Auflösbarkeit alleine ist jedoch nicht ausreichend für die Lösbarkeit der gewöhnlichen Differentialgleichung, denn eine zusätzliche Schwierigkeit liegt darin begründet, dass die Variablen $u, u', \ldots$ keine voneinander unabhängigen Variablen sind, sondern für die Lösungseigenschaft durch die Ableitungsregel miteinander verbunden sind. Um zumindest nicht mehr mit der Auflösbarkeit der Gleichung nach der höchsten Ordnung Probleme zu haben, werden wir uns in erster Linie mit sogenannten expliziten gewöhnlichen Differentialgleichungen beschäftigen.

Definition 1.6. *Seien* k, $N \in \mathbb{N}$. *Kann man die gewöhnliche Differentialgleichung* (1.1) *in der nach der Variable* $u^{(k)}$ *aufgelösten Form*

$$u^{(k)} = f(t, u, u', \ldots, u^{(k-1)}) \tag{1.2}$$

für eine Funktion $f \colon D \to \mathbb{R}^N$ (*mit* $D \subset \mathbb{R}^{1+kN}$) *schreiben, so nennt man dies eine* explizite gewöhnliche Differentialgleichung. *Die Menge* D *bezeichnet man als den* Definitionsbereich *und* f *als die* Strukturfunktion *der expliziten Differentialgleichung.*

Bemerkungen 1.7.

(i) *Die explizite Form ist weniger allgemein als die implizite Form und entspricht der speziellen Strukturfunktion* $g(t, u, u', \dots, u^{(k)}) := u^{(k)} - f(t, u, u', \dots, u^{(k-1)})$ *in der impliziten Formulierung.*

(ii) *Umgekehrt, wenn man eine implizite gewöhnliche Differentialgleichung mit Strukturfunktion* g *von der Klasse* C^1 *betrachtet, so liefert der Satz über implizite Funktionen ein hinreichendes Kriterium, die implizite Form (zumindest lokal) als explizite Gleichung schreiben zu können. Die Auflösbarkeit nach der höchsten Ordnung in einer Umgebung bei* $(t_0, x_0, x_1, \dots, x_k)$ *ist möglich, falls die partielle Ableitungsmatrix von* g *nach der höchsten Ordnung* $u^{(k)}$ *bei* $(t_0, x_0, x_1, \dots, x_k)$ *vollen Rang hat. Dies ermöglicht dann, auch ohne die Auflösung nach* $u^{(k)}$ *konkret auszuführen, einige Resultate für explizite gewöhnliche Differentialgleichungen lokal auf implizite gewöhnliche Differentialgleichungen anzuwenden.*

Beispiele 1.8.

(i) *Sei* $f_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *gegeben durch* $f_1(t, u) := \alpha u$ *für ein* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Die gewöhnliche Differentialgleichung* $u' = \lambda u$ *ist aus den Analysis-Vorlesungen bekannt und besitzt die allgemeine Lösung* $u(t) = x_0 \exp(\lambda t)$ *für beliebiges* $x_0 \in \mathbb{R}$ *(auf dem Existenzintervall* $\mathbb{R}$*).*

(ii) *Sei* $f_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *gegeben durch* $f_2(t, u) := \lambda \sin(t) u$ *für ein* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Die gewöhnliche Differentialgleichung* $u' = \lambda \sin(t) u$ *besitzt die allgemeine Lösung* $u(t) = x_0 \exp(-\lambda \cos(t))$ *für beliebiges* $x_0 \in \mathbb{R}$.

(iii) *Sei* $f_3 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *gegeben durch* $f_3(t, u) := 1 + u^2$. *Die gewöhnliche Differentialgleichung* $u' = 1 + u^2$ *besitzt die allgemeine Lösung* $u(t) = \tan(t - t_0)$ *für* $t_0 \in \mathbb{R}$ *(zur Erinnerung: es gilt* $\tan'(t) = (\sin(t)/\cos(t))' = 1 + \tan^2(t)$*) und mit maximalem Existenzintervall* $(t_0 - \pi/2, t_0 + \pi/2)$.

(iv) *Sei* $f_4 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *gegeben durch* $f_4(t, u) := (t + u)^2$. *Die gewöhnliche Differentialgleichung* $u' = (t + u)^2$ *besitzt die allgemeine Lösung* $u(t) = \tan(t - t_0) - t$ *für* $t_0 \in \mathbb{R}$ *auf dem Existenzintervall* $(t_0 - \pi/2, t_0 + \pi/2)$.

(v) *Sei* $f_5 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *gegeben durch* $f_5(t, u, u') := -\omega^2 u$ *für* $\omega \in \mathbb{R}$. *Die gewöhnliche Differentialgleichung* $u'' = -\omega^2 u$ *besitzt die allgemeine Lösung* $u(t) = a_0 \cos(\omega t) + a_1 \sin(\omega t)$ *mit* $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$.

(vi) *Sei* $f_6 \colon \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$ *gegeben durch* $f_6(t, u, \dots, u^{(k-1)}) = 0$. *Dann lösen alle Polynome vom Grad höchstens* $k - 1$ *die gewöhnliche Differentialgleichung* $u^{(k)} = 0$ *auf* $\mathbb{R}$ *(und dies entspricht* k *freien Parametern).*

Im Laufe der Vorlesung werden wir Verfahren kennenlernen (die sich typischerweise nur auf bestimmte Klassen von Gleichungen anwenden lassen), wie man Lösungen zu solchen und allgemeineren expliziten gewöhnlichen Differentialgleichungen herleitet und nicht nur die Lösungseigenschaft (bei gegebenen Kandidaten) nachrechnet.

Eine wichtige Eigenschaft im Zusammenhang mit expliziten gewöhnlichen Differentialgleichungen ist es, dass man Lösungen an aufeinanderfolgenden Intervallen zusammensetzen kann, um auf der Vereinigung der Intervalle eine Lösung zu erhalten, vorausgesetzt die Funktion und alle ihre niederen Ableitungen stimmen am Schnittpunkt der Intervalle überein. Dies ist insbesondere dann nützlich, wenn man sich für sogenannte maximale Existenzintervalle von Lösungen interessiert.

Satz 1.9 (Aneinandersetzen von Lösungen)**.** *Seien* k, $N \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^{1+kN}$ *ein Definitionsgebiet und* $f \colon D \to \mathbb{R}^N$ *eine gegebene Strukturfunktion. Hat die zugehörige explizite gewöhnliche Differentialgleichung* (1.2) k*-ter Ordnung zwei Lösungen* u_1 *und* u_2 *auf Intervallen* (t_1, τ) *und* (τ, t_2) *mit* $-\infty \le t_1 < \tau < t_2 \le \infty$, *für die*

$$\lim_{t \nearrow \tau} u_1^{(j)} = x_j = \lim_{t \searrow \tau} u_2^{(j)} \qquad \text{für jedes } j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$$

gilt, und ist f stetig bei $(\tau, x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) \in D$, so ist die zusammengesetzte Funktion $u\colon (t_1, t_2) \to \mathbb{R}^N$, definiert als

$$u(t) := \begin{cases} u_1(t) & \text{für } t \in (t_1, \tau)\,, \\ x_0 & \text{für } t = \tau\,, \\ u_2(t) & \text{für } t \in (\tau, t_2)\,, \end{cases}$$

k-fach stetig differenzierbar und löst (1.2) *auf dem ganzen Intervall (t_1, t_2).*

Beweis. Die Funktion u ist in $(t_1, \tau) \cup (\tau, t_2)$ nach Definition einer Lösung bereits k-fach differenzierbar sowie in τ nach Voraussetzung $(k-1)$-fach differenzierbar mit Werten $u^{(j)}(\tau) = x_j$ für $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Wegen der Stetigkeitsbedingung an f gilt außerdem die Existenz des Limes

$$\lim_{t \to \tau} u^{(k)}(t) = \lim_{t \to \tau} f(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(k-1)}(t)) = f(\tau, u(\tau), u'(\tau), \ldots, u^{(k-1)}(\tau))\,.$$

Die Existenz der k-ten Ableitung bei τ (und zugleich die Lösungseigenschaft) folgt dann mithilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung und wiederum der Stetigkeit von f:

$$\lim_{h \to 0} \frac{u^{(k-1)}(\tau + h) - u^{(k-1)}(\tau)}{h} = f(\tau, u(\tau), u'(\tau), \ldots, u^{(k-1)}(\tau))\,. \qquad \square$$

Selbst explizite gewöhnliche Differentialgleichungen lassen sich nicht in ihrer Allgemeinheit untersuchen, und so betrachtet man besondere Klassen von expliziten Differentialgleichungen, für die jeweils charakteristische Eigenschaften gelten und dementsprechend daran angepasste Methoden für die Untersuchung der Lösungen existieren. Eine erste besondere Klasse von gewöhnlichen Differentialgleichungen sind die autonomen Gleichungen, die dadurch charakterisiert sind, dass sie nicht explizit von der unabhängigen Variable abhängen.

Definition 1.10. *Eine gewöhnliche Differentialgleichung heißt* autonom, *falls die Strukturfunktion nicht von der unabhängigen Variable t abhängt, d.h. falls die implizite Gleichung* (1.1) *von der Form*

$$g(u, u', \ldots, u^{(k)}) = 0$$

ist, bzw. die explizite Gleichung (1.2) *von der Form*

$$u^{(k)} = f(u, u', \ldots, u^{(k-1)})\,.$$

Die Translationsinvarianz der Gleichung überträgt sich dabei direkt auf ihre Lösungen (vgl. Beispiel 1.8 (iii)):

Lemma 1.11 (Translationsinvarianz autonomer gewöhnlicher Differentialgleichungen)**.** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $u\colon I \to \mathbb{R}^N$ eine Lösung zur autonomen Gleichung $g(u, u', \ldots, u^{(k)}) = 0$ in I. Für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ ist dann die Funktion $v\colon t_0 + I \to \mathbb{R}^N$ (mit $t_0 + I := \{t_0 + t \colon t \in I\}$) definiert als*

$$v(t) := u(t - t_0) \qquad \text{für } t \in t_0 + I$$

eine Lösung derselben Gleichung auf dem translatierten Intervall $t_0 + I$.

Beweis. Für $t \in t_0 + I$ (oder äquivalent $t - t_0 \in I$) gilt $v^{(j)}(t) = u^{(j)}(t - t_0)$ für jedes $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$. Damit folgt dann für jedes $t \in t_0 + I$

$$g(v(t), v'(t), \ldots, v^{(k)}(t)) = g(u(t - t_0), u'(t - t_0), \ldots, u^{(k)}(t - t_0)) = 0\,,$$

und die Lösungseigenschaft von v auf $t_0 + I$ ist gezeigt. $\square$

Lemma 1.12 (Charakterisierung konstanter Lösungen)**.** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Genua dann gibt es eine konstante Lösung $u\colon I \to \mathbb{R}^N$ zur autonomen Gleichung $g(u, u', \ldots, u^{(k)}) = 0$ in I mit Wert $x_0 \in \mathbb{R}^N$, falls $g(x_0, 0, \ldots, 0) = 0$ gilt. Für explizite gewöhnliche Differentialgleichungen $u' = f(u)$ erster Ordnung charakterisieren die Nullstellen der Strukturfunktion also genau ihre konstanten Lösungen.*

Beweis. Ist $u \equiv x_0$ eine Lösung von $g(u, u', \ldots, u^{(k)}) = 0$ in I, so gilt offensichtlich $g(x_0, 0, \ldots, 0) = 0$. Ist umgekehrt $g(x_0, 0, \ldots, 0) = 0$, so gilt für die konstante Funktion $u \equiv x_0$ auch

$$g(u(t), u'(t), \ldots, u^{(k)}(t)) = g(x_0, 0, \ldots, 0) = 0$$

für jedes $t \in I$ und damit die behauptete Lösungseigenschaft von u. □

Die zweite besondere (und in gewisser Weise wichtigste) Klasse von Differentialgleichungen, die man verstehen sollte, ist die Klasse der *linearen Differentialgleichungen*.

Definition 1.13. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form*

$$A_k(t)u^{(k)} + A_{k-1}(t)u^{(k-1)} + \ldots + A_1(t)u' + A_0(t)u = b(t) \qquad \text{in } I \tag{1.3}$$

mit Koeffizientenfunktionen $A_0, A_1, \ldots, A_k \colon I \to \mathbb{R}^{N \times N}$ *und* Inhomogenität $b \colon I \to \mathbb{R}^N$ *nennt man* lineare gewöhnliche Differentialgleichung *k-ter Ordnung* (*bzw. genauer ein* System von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen *im Fall $N > 1$*). *Für $b = 0$ nennt man sie* homogen, *andernfalls* inhomogen. *Wenn alle Koeffizientenfunktionen $A_0, A_1, \ldots, A_k$ konstant auf I sind, so spricht man von einer* linearen Gleichung mit konstanten Koeffizienten.

Das Polynom

$$p(t, \xi) \coloneqq A_k(t)\xi^k + A_{k-1}(t)\xi^{k-1} + \ldots + A_1(t)\xi + A_0(t)$$

ist das zur Gleichung (1.3) *assoziierte* charakteristische Polynom *oder das* Symbol *des zugehörigen Differentialoperators* (*formal wird dieses Polynom also einfach gebildet, indem jede Ableitungsordnung der abhängigen Variable durch die neue Variable ξ ersetzt wird*).

Bemerkung 1.14. *Möchte man gewöhnliche Differentialgleichungen auf normierten Räumen E mit Werten in einem normierten Raum F behandeln, so muss man Koeffizientenfunktionen und Inhomogenitäten betrachten, die Werte in den linearen Abbildungen $L(E, F)$ bzw. in F annehmen.*

Lemma 1.15 (Superpositionsprinzip für lineare Gleichungen)**.** *Seien u_1 bzw. u_2 Lösungen der linearen gewöhnlichen Differentialgleichung* (1.3) *mit Inhomogenitäten b_1 bzw. b_2. Für beliebige Zahlen $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $a_1u_1 + a_2u_2$ eine Lösung der linearen Gleichung* (1.3) *mit Inhomogenität $a_1b_1 + a_2b_2$. Insbesondere ist mit je zwei Lösungen der homogenen Differentialgleichung* (1.3) *auch jede Linearkombination wieder eine Lösung der homogenen Gleichung* (*und die Menge der Lösungen der homogenen Gleichung bildet damit einen Vektorraum*).

Beweis. Dies folgt sofort mit der Linearität der Ableitungsoperation sowie der Gleichung. □

Eine weitere wichtige Bemerkung ist, dass die Behandlung von gewöhnlichen Gleichungen erster Ordnung von besonderem Interesse ist und als Ausgangspunkt für die Untersuchung allgemeiner gewöhnlichen Differentialgleichungen angesehen werden kann. Lässt man spezielle Eigenschaften außer Acht, so stellt sich nämlich heraus, dass allgemeine Eigenschaften (wie Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen) nur für Gleichungen erster Ordnung untersucht werden müssen, da man Gleichungen höherer Ordnung immer in ein System von Gleichungen erster Ordnung überführen kann – dabei aber als Preis zahlen muss, nun mit einer um die Ordnung multiplizierten Anzahl von Gleichungen und unbekannten Funktionen arbeiten zu müssen.

Satz 1.16 (Reduktion der Ordnung)**.** *Jedes* (*implizite*) *System von gewöhnlichen Differentialgleichungen k-ter Ordnung*

$$g(t, u, u', \ldots, u^{(k)}) = 0 \tag{1.4}$$

für eine unbekannte Funktion $u \colon I \to \mathbb{R}^N$ ist äquivalent zu einem System erster Ordnung, mit k-facher Anzahl an unbekannten Funktionen und k-facher Anzahl an Gleichungen:

$$\begin{cases} u_1' = & u_2 \\ u_2' = & u_3 \\ \vdots & \\ u_{k-1}' = & u_k \\ g(t, u_1, u_2, \ldots, u_k, u_k') = & 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

für unbekannte Funktionen $u_j \colon I \to \mathbb{R}^N$ für $j \in \{1, \dots, k\}$.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass u eine Lösung zu (1.4) ist. Dann ist die Funktion

$$(u_1, \dots, u_k) \coloneqq (u, u', \dots, u^{(k-1)})$$

eine Lösung zu (1.5), denn es gilt nach Definition der Funktionen u_j und mithilfe der Gleichung

$$u_j' = (u^{(j-1)})' = u^{(j)} = u_{j+1}$$

für $j \in \{1, \dots k-1\}$ sowie

$$0 = g(t, u, u', \dots, u^{(k-1)}, u^{(k)}) = g(t, u_1, u_2, \dots, u_k, u_k')\,.$$

Ist umgekehrt $(u_1, \dots, u_k)$ eine Lösung zu (1.5), so definiert man $u \coloneqq u_1$ und verifiziert anschließend die Lösungseigenschaft für (1.4): es gilt mithilfe der ersten $k-1$ Gleichungen in (1.5)

$$u' = u_1' = u_2\,, \quad u'' = (u_2)' = u_3\,, \quad \dots \quad u^{(k-1)} = (u_{k-1})' = u_k$$

(u ist damit insbesondere k-fach differenzierbar, da nach Definition der Lösung zu (1.5) jede der Funktionen $u_1, \dots, u_k$ differenzierbar ist), und eingesetzt in die letzte Gleichung folgt dann

$$0 = g(t, u_1, u_2, \dots, u_k, u_k') = g(t, u, u', \dots, u^{(k-1)}, u^{(k)})\,. \qquad \square$$

Bemerkung 1.17. *Da explizite gewöhnliche Differentialgleichungen ein Spezialfall der implizit formulierten Gleichungen sind, ergibt sich eine entsprechende Reduktion der Ordnung auch für explizite Gleichungen. Führt man eine weitere Variable $u_0 = t$ ein, die offensichtlich der Differentialgleichung $u_0' = 1$ genügt, so kann man eine gegebenes System gewöhnlicher Differentialgleichungen stets in ein autonomes System (mit einer zusätzlichen Gleichung) überführen. Da so aber die Unterscheidung zwischen der unabhängigen Variable t und der abhängigen Variable u aufgehoben wird, ist dies meist nicht zweckmäßig, da eventuell wichtige Strukturen wie Linearität durch diese Umformulierung zerstört werden können.*

Wir haben in den Beispielen bereits gesehen, dass selbst für gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung Lösungen im Allgemeinen nicht eindeutig sind. Tatsächlich haben wir als Lösungen, falls sie denn existieren, ganze Familien von Funktionen erhalten, die noch von einem oder mehreren freien Parametern abhängen. Um nur bestimmte Lösungen (oder gar eine eindeutige Lösung) auszuwählen, ist es daher notwendig, weitere Bedingungen festzulegen, die eine Lösung erfüllen soll. Meist legt man Werte der Lösung und gegebenenfalls ihrer Ableitungen zu einem oder mehreren Zeitpunkten fest (und spricht dann von *Randbedingungen* oder *Anfangswertbedingungen*). Dabei gilt, je höher die Ordnung der Gleichung, umso mehr Bedingungen müssen festgelegt werden (und aus Überlegungen der linearen Algebra würde man erwarten, dass man bei einem Problem k-ter Ordnung in N Variablen kN freie Parameter hat, die dann durch kN unabhängige Nebenbedingungen festgelegt werden können).

Definition 1.18. *Seien k, $N \in \mathbb{N}$, $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^{1+(k+1)N}$ und $g \colon \tilde{D} \to \mathbb{R}^N$ eine gegebene Strukturfunktion. Ist $(t_0, x_0, \dots, x_{k-1})$ ein Punkt in $\mathbb{R}^{1+kN}$, so nennt man die Forderung*

$$u(t_0) = x_0\,, \quad u'(t_0) = x_1\,, \quad \dots \quad u^{(k-1)}(t_0) = x_{k-1}$$

an eine $(k-1)$-fach stetig differenzierbare Funktion u eine Anfangsbedingung *zur Zeit t_0, wobei man t_0 als die* Anfangszeit *und $(x_0, \dots, x_{k-1})$ als die* Anfangswerte *bezeichnet. Die Kopplung der Anfangsbedingung an die gewöhnliche Differentialgleichung*

$$g(t, u, u', \dots, u^{(k)}) = 0$$

bezeichnet man als Anfangswertproblem. *Unter einer* Lösung des Anfangswertproblems *versteht man dann eine k-fach differenzierbare Funktion $u \colon I \to \mathbb{R}^N$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$, so dass zum einen die Differentialgleichung gelöst wird und zum anderen die Anfangsbedingung erfüllt ist (insbesondere muss also $(t_0, u(t_0), u'(t_0), \dots, u^{(k)}(t_0)) \in \tilde{D}$ gelten).*

Bemerkung 1.19. *Im für uns wichtigsten Fall von expliziten gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung mit Strukturfunktion f und Definitionsgebiet $D \subset \mathbb{R}^{1+N}$ suchen wir beim Anfangswertproblem mit Anfangsbedingung $(t_0, x_0) \in D$ nach einer differenzierbaren Funktion $u\colon I \to \mathbb{R}^N$ für ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$, so dass gilt:*

$$\begin{cases} u' &= f(t,u) \quad \text{in } I\,, \\ u(t_0) &= x_0\,. \end{cases}$$

Äquivalent können Anfangswertprobleme zu expliziten gewöhnliche Differentialgleichungen auch als Integralgleichung formuliert werden. Betrachtet man Gleichungen erster Ordnung, so haben diese den Vorteil, dass man formal lediglich nach einer stetigen (aber a posteriori dann doch differenzierbaren) anstelle einer a priori differenzierbaren Lösung sucht.

Satz 1.20 (Umformung als Integralgleichung)**.** *Sei $N \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ und $f\colon I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ eine stetige Funktion. Eine Funktion $u\colon I \to \mathbb{R}^N$ ist genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} u' &= f(t,u) \quad \text{in } I\,, \\ u(t_0) &= x_0\,, \end{cases}$$

falls sie stetig ist und für jedes $t \in I$ die folgende Integralgleichung erfüllt:

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds\,.$$

Beweis. Die Äquivalenz gilt sofort durch Integration der Differentialgleichung von t_0 bis t bzw. Differentiation der Integralgleichung nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. □

1.2 Klassische Fragestellungen

Nur in seltenen Fällen ist es möglich, explizite Lösungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen zu bestimmen, um diese dann im Anschluss genauer zu untersuchen. Bei der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen liegt daher das Hauptinteresse in einer allgemeineren Untersuchung der gewöhnlichen Differentialgleichungen, um Aussagen zu Existenz, Eindeutigkeit und (quantitativem wie qualitativem) Verhalten von Lösungen zu machen. Im Mittelpunkt dieser Vorlesung stehen dabei die folgenden Fragestellungen:

Existenz von Lösungen. Grundsätzlich ist man daran interessiert, einen (abstrakten oder sehr konkreten) Überblick über die Gesamtheit aller Lösungen zu gewinnen oder gar eine allgemeine Lösungsformel herzuleiten. Es stellt sich jedoch heraus, dass nur wenige, sehr spezielle Klassen von gewöhnlichen Differentialgleichungen explizite Lösungsverfahren zulassen (wie etwa Trennung der Variablen, Potenzreihenansatz oder Substitutionsmethode), und selbst gewöhnliche Differentialgleichungen von sehr einfacher Struktur sich nicht elementar lösen lassen (wie zum Beispiel $u' = \exp(-t^2)$). Selbst in solchen Fällen kann man jedoch versuchen, für Anfangswertprobleme Aussagen zur Existenz von Lösungen in Abhängigkeit von Eigenschaften der Strukturfunktion zu treffen. Hierzu werden wir insbesondere den Existenzsatz von Peano kennenlernen.

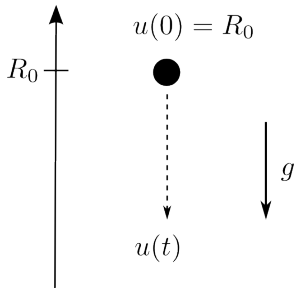
Eindeutigkeit von Lösungen. Hat man keine allgemeine Lösungsformel, so muss auch die Eindeutigkeit von Lösungen zu Anfangs- oder Randwertproblemen allgemein untersucht werden. Wir werden in dieser Hinsicht (globale und lokale) Versionen des Satzes von Picard–Lindelöf zeigen, der unter (im Vergleich zum Existenzsatz von Peano) leicht verstärkten Voraussetzungen an die Strukturfunktion die Eindeutigkeit von Lösungen liefert.

Abhängigkeit der Lösungen von den Daten und Stabilität. Da viele gewöhnliche Differentialgleichungen durch Anwendungen motiviert sind und dabei typischerweise nicht beliebig genau eine Anfangsbedingung gemessen oder die Strukturfunktionen (oder Koeffizienten) bestimmt werden können, sollte man auch untersuchen, wie sensitiv Lösungen auf kleine Störungen in Anfangsdaten und den Parametern der gewöhnlichen Differentialgleichung reagieren. Hierbei kann man zum einen das Abweichen zweier Lösungen mit verschiedenen Daten zueinander in einem endlichen Zeitintervall betrachten, oder aber im Rahmen der Stabilitätstheorie das grundsätzliche Verhalten der Lösungen im Unendlichen studieren. Dies werden wir zunächst für lineare Differentialgleichungssysteme machen, und abschließend, über Linearisierung bzw. über Ljapunovfunktionen, auch für nichtlineare Systeme die Stabilität von Ruhelagen untersuchen.

1.3 Erste Anwendungsbeispiele

Im Folgenden soll exemplarisch gezeigt werden, wie einige konkrete Problem mathematisch in Form von gewöhnlichen Differentialgleichungen beschrieben werden können. Typischerweise möchte man in der Anwendung ein Phänomen beschreiben und weiß (entweder sehr vage und qualitativ oder näherungsweise und relativ exakt), welche Größen in welcher Form dabei eine Rolle spielen. Ist das Phänomen durch Änderungsverhalten (also Ableitungen) beschrieben, so führt dies auf eine (gewöhnliche oder bei Änderungen in mehreren Größen auf eine partielle) Differentialgleichung, die man dann im nächsten Schritt mathematisch untersuchen kann und das qualitative Verhalten der Lösungen dann mit Beobachtungen aus der Realität vergleichen kann (um so auch eventuelle Anpassungen an der Gleichungen vornehmen zu können, wenn "unphysikalische" oder "unrealistische" Lösungen bei der resultierenden Differentialgleichung vorkommen).

Freier Fall im homogenen Schwerefeld. Wir wollen beschreiben, wie ein Körper sich verhält, der zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ von der Ruheposition $R_0 \in \mathbb{R}^+$ losgelassen wird und dann unter dem Einfluss einer konstanten Schwerkraft fällt, d.h. wir interessieren uns für die Position $u(t)$ des Körpers in Abhängigkeit von der Zeit t, wobei die Anfangsbedingungen als $u(0) = R_0$ und $u'(0) = 0$ gegeben sind.



Die für uns interessanten Größen sind nun die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Körpers, die als erste Ableitung $u'(t)$ bzw. als zweite Ableitung $u''(t)$ zu jedem Zeitpunkt t gegeben sind. Ist man in einem homogenen Schwerefeld mit Fallbeschleunigung $g \in \mathbb{R}^+$ (das ist genau die Beschleunigung, mit der sich ein frei fallender Körper in Bewegung setzt), erhalten wir als Anfangswertproblem für die Position des Körpers:

$$\begin{cases} u'' = -g \quad \text{für } t > 0\,, \\ u(0) = R_0\,, \quad u'(0) = 0\,. \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist

$$u(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + at + b$$

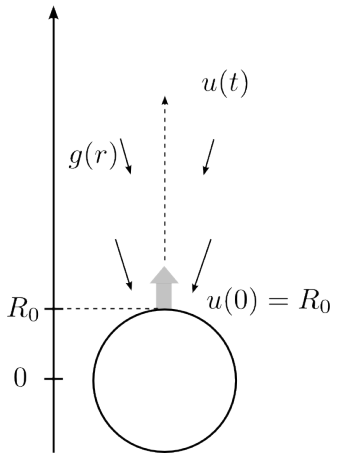
mit beliebigen Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$, und nach Wahl der Anfangsbedingung ist die Position des Körpers zur Zeit t also gegeben durch

$$u(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + R_0\,.$$

Historisches: Die Tatsache, dass ein Körper unter dem ausschließlichen Einfluss der Schwerkraft (also insbesondere unter Vernachlässigung von Reibungskräften) mit konstanter Beschleunigung fällt, wurde von Galileo Galilei im Jahre 1609 mathematisch korrekt formuliert, und durch Experimente an Fallrinnen bestätigt (mangels genauer Uhren eine gute Approximation an den freien Fall). Daher wird dieser Sachverhalt auch als das Fallgesetz von Galileo Galilei bezeichnet.

Diese Entdeckung markiert einen Wendepunkt in der modernen Wissenschaft, denn bis dahin war im Wesentlichen noch die Bewegungslehre des Aristoteles verbreitet, die besagt, dass Körper im freien Fall umso schneller fallen sollten, je schwerer sie sind.

Fluchtgeschwindigkeit einer Rakete. Ein (annähernd) homogenes Schwerefeld wie im letzten Beispiel des freien Falls liegt etwa vor, wenn wir uns in der Nähe der Erdoberfläche befinden. Doch je weiter wir uns von der Erde entfernen, desto kleiner wird auch die Schwerkraft oder Erdanziehungskraft. Genauer verhält sich die Schwerkraft von zwei Massen (wie hier die der Erde und die einer Rakete) umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes zwischen den beiden Körpern (die restlichen Abhängigkeiten wie die Massen und Gravitationskonstante sind in dieser Versuchsanordnung konstant und für uns nicht von Bedeutung). Wollen wir nun eine Rakete von der Erdoberfläche R_0 (und mit dem Erdmittelpunkt im Ursprung) ins Weltall schicken, so dass sie niemals zur Erde zurückkehrt (unter Annahme, dass es keine Reibung und keine weitere Massenanziehungen gibt), dann ergibt sich als Randwertproblem für die Position des Körpers



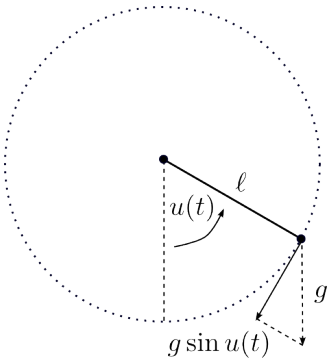
$$\begin{cases} u'' = -\tilde{g}u^{-2} & \text{für } t > 0\,, \\ u(0) = R_0\,, \quad \lim_{s\to\infty} u(s) = \infty\,. \end{cases}$$

mit einer Konstante $\tilde{g}$ (die sich aus den Daten von Erde und Rakete ergibt). Lösungsverfahren für gewöhnliche Gleichungen dieser Art werden wir später noch kennenlernen, jedoch können wir jetzt schon leicht verifizieren, dass die Funktionen

$$u(t) = \left(\frac{9}{2}\tilde{g}\right)^{\frac{1}{3}} (c \pm t)^{\frac{2}{3}}$$

für alle Konstanten $c \in \mathbb{R}$ Lösungen sind (und dieser Ausdruck ist sinnvoll, solange $c \pm t > 0$ gilt). Für unsere Problemstellung, in der wir die Rakete von der Erde wegschicken wollen, müssen wir die $+$-Lösung betrachten. Die Randbedingung im Unendlichen ist dann automatisch erfüllt und durch eine geeignete Wahl von c lässt sich auch die andere Anfangsbedingung $u(0) = R_0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ sicherstellen. Dies ermöglicht es, die Anfangsgeschwindigkeit zu berechnen, was dann genau der Fluchtgeschwindigkeit entspricht, also der Mindestgeschwindigkeit, die die abgeschossene Rakete (ohne zusätzlichen Antrieb) haben muss, um nicht mehr zur Erde zurückzukehren.

Mathematisches Pendel. Wir betrachten wieder die Position eines Körpers unter dem Einfluss eines homogenen Schwerefeld, schränken nun aber die Bewegung ein, indem wir den Körper an einem (reibungsfrei rotierenden) Stab vorgegebener Länge ℓ befestigen, der um den Ursprung (in einer Ebene) rotieren kann. Somit kann man die eigentlich zweidimensionale Bewegung durch nur eine Koordinate (etwa den Winkel von der senkrechten Ausrichtung nach unten) beschreiben. Die wesentlichen Größen sind damit nun der Winkel $u(t)$, die Winkelgeschwindigkeit $u'(t)$ und die Winkelbeschleunigung $u''(t)$ zum Zeitpunkt t.



Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz ist die Kraft gleich dem Produkt aus Masse und Beschleunigung, wobei die einzig wirkende Kraft in dieser Versuchsanordnung die der Gravitation ist, und hier auch nur der tangentiale Anteil $-g\sin(u(t))$ (mal Masse). Die gewöhnliche Differentialgleichung, die die Winkelposition beschreibt, ist also gegeben durch

$$\ell u'' = -g\sin(u)\,,$$

und je nach anfänglicher Ausrichtung des Körpers kann man entsprechende Anfangsbedingungen angeben. Zwei besonders einfach Anfangsbedingungen, für die wir leicht die Lösung dieser autonomen Gleichung berechnen können, sind die beiden Fälle

$$\begin{aligned} u(0) = 0\,, \quad u'(0) = 0 \quad &\Rightarrow u \equiv 0\,, \\ u(0) = \pi\,, \quad u'(0) = 0 \quad &\Rightarrow u \equiv \pi\,, \end{aligned}$$

die Ruhelagen der Gleichung (in denen die Ableitung u' verschwindet). Die erste Ruhelage entspricht der Situation, dass sich das Pendel in der tiefsten Lage befindet, die zweite Ruhelage dagegen der Situation, dass sich das Pendel in der höchsten Lage befindet. Wir werden später sehen, wie man diese Zustände mathematisch in stabile und instabile Ruhelage einordnen kann (was hier intuitiv recht klar ist, da der erste Zustand durch Wackeln nicht groß geändert wird, beim zweiten aber eine große Pendelbewegung in Gang gesetzt wird).

Die gewöhnliche Differentialgleichung für das mathematische Pendel kann man außerdem für kleine Auslenkungen des Stabes durch eine linearisierte Version annähern. Falls die Auslenkung u nämlich klein ist, so ist $\sin(u) \sim u$, und wir erhalten als Gleichung

$$\ell u'' = -gu\,,$$

für die wir in Beispiel 1.8 (v) die allgemeine Lösung $u(t) = a\sin(\sqrt{g/\ell}\,t) + b\cos(\sqrt{g/\ell}\,t)$ für $a, b \in \mathbb{R}$ bestimmt haben. Diese ist, wie erwartet, periodisch, und die freien Parameter lassen sich nun je nach Anfangsbedingung geeignet wählen.

Wachstum von Populationen. Wir betrachten nun das Wachstum einer Population und bezeichnen mit $u(t)$ die Größe der Population (als kontinuierliche Funktion). Die Änderung innerhalb einer bestimmten Zeitspanne in der Populationsgröße ist typischerweise proportional zum Produkt aus aktueller Populationsgröße und der Wartezeit, also

$$u' = \alpha u\,.$$

Im Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ kann man nun verschiedene Faktoren berücksichtigen: Populationen, die sich nicht mehr vermehren, sondern nur noch sterben (was in $\alpha < 0$ resultiert), Populationen, die sich nur vermehren ($\alpha > 0$), oder Populationen, in denen Änderungen sowohl durch Sterbefälle als auch Geburten eintreten (je nachdem, welcher Effekt hier überwiegt, kann α in diesem Fall verschwinden, positiv oder negativ sein). Als Lösung haben wir in Beispiel 1.8 (i) bereits $u(t) = x_0 \exp(\alpha t)$ verifiziert, und x_0 steht hier nun für die Größe der Anfangspopulation. In diesem Fall ist das Wachstum der Population also exponentiell, und insbesondere haben wir, für beliebiges $\alpha > 0$, eine Verdopplung der Population nach einer Wartezeit $T = \log(2)/\alpha$ (die damit insbesondere unabhängig von der aktuellen Populationsgröße ist), denn es gilt

$$u(t+T) = x_0 \exp(\alpha t + \alpha T) = x_0 \exp(\alpha t)\exp(\alpha T) = 2u(t)$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$. Für kleine Populationen ist dieses *exponentielle Wachstum* eine sehr gute Näherung, jedoch treten gerade bei großen Populationen weitere essentielle Effekte auf, die sich direkt auf das Wachstum auswirken (etwa: begrenzte Nahrung, Stress bei zu wenig Platz oder Konkurrenzkampf etc.). Daher werden hier typischerweise Anpassungen vorgenommen, die alle auf der Idee basieren, dass das Wachstum bei großer Populationsgröße (d.h. je näher man einem Schwellenwert kommt) langsamer wird. Ein solches Modell ist das *logistische Wachstum*, das durch die Differentialgleichung

$$u' = \alpha u(S - u)$$

beschrieben wird, mit positivem Parameter $\alpha > 0$ und Schwellenwert $S > 0$. Hier wäre das Wachstum negativ, sobald $u(t) > S$ gilt. Man kann leicht zeigen, dass

$$u(t) = \frac{Sx_0}{x_0 + (S - x_0)\exp(-\alpha S t)}$$

eine Lösung der Differentialgleichung mit Anfangswert $u(0) = x_0$ darstellt. Insbesondere hat man immer $u(t) \leq S$, falls $x_0 \leq S$ erfüllt ist. Die beiden offensichtlichen Ruhelagen sind hier $u \equiv 0$ und $u \equiv S$.

Lotka–Volterra (oder Räuber-Beute)-Modell. Nach der Betrachtung des Wachstums einer einzigen Population betrachten wir nun die Entwicklung (in Abhängigkeit von der Zeit) zweier unterschiedlicher Populationen, nämlich von Beutetieren $u_1(t)$, die Nahrung im Überfluss haben, und von Räubern $u_2(t)$, die sich ausschließlich von den Beutetieren ernähren. Standardbeispiel hierfür wären die Populationsgrößen von Füchsen und Hasen oder von Löwen und Gazellen. Wenn wir die zeitliche Entwicklung der Populationen nun mathematisch beschreiben wollen, so gibt es verschiedene Faktoren, die zu berücksichtigen sind. Die Beutetiere vermehren sich, ohne Beisein von Räubern, exponentiell (oder logistisch), und sobald es Räuber gibt, so kommt ein negativer Beitrag hinzu, der umso größer ist, je mehr Räuber es gibt (oder je mehr Begegnungen es zwischen Räubern und Beutetieren gibt). Bei den Räubern gibt es dagegen, ohne Vorhandensein von Nahrung in Form von Beutetieren, einen exponentiellen Abfall, und einen positiven Beitrag, sobald es mehr Nahrung (oder Begegnungen zwischen Räubern und Beutetieren) gibt. Die gewöhnliche Differentialgleichung für das Räuber-Beute-System lautet demzufolge in der einfachsten Form

$$\begin{cases} u_1' &= \alpha_1 u_1 - \beta_1 u_1 u_2 \,, \\ u_2' &= -\alpha_2 u_2 + \beta_2 u_1 u_2 \,, \end{cases}$$

für positive Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$. Hier liest man als Ruhelagen

$$u_1 \equiv \frac{\alpha_2}{\beta_2}\,, \quad u_2 \equiv \frac{\alpha_1}{\beta_1}$$

ab, und wir werden später sehen, dass die Lösungen (ausgehend von positiven Anfangspopulationen) immer positiv bleiben und periodisch sind, und zwar ohne dass wir explizite Lösungsformeln kennen müssen. Will man zusätzlich Stressverhalten bei großen Populationen berücksichtigen, also eine logistisches Wachstum der Entwicklung der Populationen zugrunde legen, so betrachtet man das etwas kompliziertere System gewöhnlicher Differentialgleichung

$$\begin{cases} u_1' &= \alpha_1 u_1 - \beta_1 u_1 u_2 - \gamma_1 u_1^2 \,, \\ u_2' &= -\alpha_2 u_2 + \beta_2 u_1 u_2 - \gamma_2 u_2^2 \,, \end{cases}$$

für positive Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$.

Historisches: Dieses Modell wurde unabhängig von dem Chemiker und Mathematiker Alfred Lotka 1910 im Zusammenhang mit chemischen Reaktionen und von dem Physiker und Mathematiker Vito Volterra 1926 für Räuber-Beute-Beziehungen vorgeschlagen. Letzterer wurde von dem Meeresbiologen (und seinem späteren Schwiegersohn) Umberto D'Ancona zu einer mathematischen Begründung der Veränderung der Fischfangraten während des ersten Weltkriegs befragt. Der Anteil der Haifische unter dem totalen Fischfang war in diesen Jahren beträchtlich gestiegen, und D'Ancona vermutete als Ursache, dass allgemein die Fischerei in den Kriegsjahren zurückging und damit den Haifischen als Räubern mehr Beutetiere als Nahrung zur Verfügung standen. Das war allerdings noch keine Begründung der Verschiebung des Verhältnisses, sondern allenfalls eines insgesamt höheren Fischvorkommens, und eine Antwort wurde erst von Volterra nach Aufstellung des mathematischen Modells gegeben. Tatsächlich kann man für das Grundmodell zeigen, dass die Populationen sich nicht nur periodisch verhalten, sondern dass die Mittelwerte über eine Periode konstant sind und den Werten der Ruhelagen entsprechen. Wird das natürliche System nun durch Fischfang gestört, so ergeben sich neue Parameter $\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 - \varepsilon$ sowie $\tilde{\alpha}_2 = \alpha_2 + \varepsilon$ (und $\varepsilon < \alpha_1$ entspricht dabei der Intensität des Fischfangs, der für Räuber- und Beutetiere in gleicher Weise wirkt). Da die Ruhelagen (und damit die Mittelwerte) sich damit für die Räubertiere monoton fallend und für die Beutetiere monoton steigend in ε verhalten, erklärt sich (der eigentlich überraschende) Sachverhalt, dass es mit weniger Fischfang verhältnismäßig mehr Haifische unter den gefangenen Fischen gibt als bei hohem Fischfang.

Modelle aus der Epidemiologie. Die Epidemiologie untersucht die Verbreitung von Krankheiten (insbesondere Epidemien oder Infektionskrankheiten wie Malaria und Ebola) in einer Population. Mathematische Modelle helfen hier, in einem konkreten Krankheitsfall geeignet vorzugehen (etwa Quarantäne für Erkrankte oder Abwarten). In einem einfachen Modell kann man beispielsweise die Population in drei (kontinuierliche) Mengen einteilen, nämlich in die Gesunden $G(t)$, in die Infizierten $I(t)$ und die restlichen $R(t)$ (der Einfachheit halber entweder resistent oder verstorben). Unter der Annahme, dass es keine Geburten gibt, ist es sinnvoll, eine Neuinfektionsrate anzunehmen, die proportional zu Begegnungen zwischen Infizierten und Gesunden ist (vgl. das Räuber-Beute-Modell), und eine Übergangsrate

von Infizierten zur Restmenge, die proportional zur Menge der Infizierten ist. Damit ergibt sich dann das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{cases} G' &= -\alpha G I\,, \\ I' &= \alpha G I - \beta I\,, \\ R' &= \beta I \end{cases}$$

für positive Parameter α, β (hier hat α die Bedeutung einer Infektionsrate, β die einer Sterbe-, Heilungs- oder Immunisierungsrate, und beide Parameter sind charakteristische Größen für eine konkrete Erkrankung). Für dieses System gibt es nur den trivialen Gleichgewichtszustand $I \equiv 0$, und nach Konstruktion (da es nur Zustandswechsel gibt) ist die Gesamtzahl $G + I + R$ konstant für alle Zeiten. Die ersten beiden Gleichungen hängen nicht von der Größe R ab, daher kann man zunächst die ersten beiden (gekoppelten) Gleichungen lösen und dann die dritte durch Integration lösen. Ohne diese explizit zu lösen, überlegen wir uns das Infektionsverhalten. Unkritisch ist sicherlich der Fall, dass die Menge der Infizierten monoton fällt, was der Fall für $G < \beta/\alpha$ ist. Daher kann sich eine Epidemie nur dann ereignen, wenn es genügend Gesunde (und damit Infizierbare) gibt, und wie man erwarten würde, hilft hier Aufklärung, Quarantäne für Erkrankte und gute medizinische Behandlung (aber auch schnelle Sterberaten), das Risiko einer Epidemie zu mindern. Wie wir später noch sehen werden, kann man I bei solchen Systemen auch als Funktion von G ausdrücken, mit $I'(G) = -1 + \beta/(\alpha G)$, so dass man mit Integration $I(0) = -\infty$ und $I(G(0)) = I(0) > 0$ erhält. Daraus können wir folgern, dass die Infektion stoppt (also $I(t) = 0$ für ein $t > 0$ gilt), wenn es noch Gesunde gibt (und nicht, weil es keine Gesunden mehr gibt, wie man auch denken könnte).

Reaktionskinetik in der Chemie. Chemische Reaktionen werden typischerweise durch Umwandlungen gewisser chemischer Elemente oder Moleküle sowie einer Reaktionsrate beschrieben (wobei die Geschwindigkeit der Reaktion bei einer einfachen Reaktion in der Regel proportional zur Menge der vorhandenen chemischen Substanz ist, wie etwa beim Wachstum von Populationen, und bei einer Reaktion aus zwei Substanzen proportional zum Produkt der Substanzen ist, wie beim Räuber-Beute-Modell). Wie sich Konzentrationen auf lange Sicht entwickeln, lässt sich dann über gewöhnliche Differentialgleichungen beschreiben, und wir betrachten nun für ein vereinfachtes Modell, wie Stickstoffoxide Anteil sowohl an der Bildung als auch am Abbau von Ozon haben. Als relevante chemischen Substanzen nehmen wir die Mengen an Sauerstoff $[O](t)$, molekularer Sauerstoff $[O_2](t)$, Ozon $[O_3](t)$, Stickstoffmonoxid $[NO](t)$ und Stickstoffdioxid $[NO_2](t)$, in Abhängigkeit von der Zeit t, und berücksichtigen dafür die chemischen Reaktionen

$$\begin{aligned} [O_3] + [NO] &\longrightarrow [NO_2] + [O_2] \\ [NO_2] &\longrightarrow [NO] + [O] \\ [O] + [O_2] &\longrightarrow [O_3] \end{aligned}$$

mit positiven Raten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Beachten wir nun, in welchen Prozessen welche Substanz entsteht bzw. abgebaut wird, ergibt sich mit

$$\begin{cases} [O]' &= \alpha_2[NO_2] \qquad - \alpha_3[O][O_2] \\ [O_2]' &= \alpha_1[O_3][NO] - \alpha_3[O][O_2] \\ [O_3]' &= -\alpha_1[O_3][NO] + \alpha_3[O][O_2] \\ [NO]' &= -\alpha_1[O_3][NO] + \alpha_2[NO_2] \\ [NO_2]' &= \alpha_1[O_3][NO] - \alpha_2[NO_2] \end{cases}$$

ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen, das man (in Abhängigkeit der verschiedenen Parameter) mit Methoden gewöhnlicher Differentialgleichungen hinsichtlich des Langzeitverhaltens untersuchen kann.

1.4 Bemerkungen zu der geometrischen Interpretation von gewöhnlichen Differentialgleichungen

Nachdem wir im letzten Abschnitt kurz darauf eingegangen sind, wie man (Systeme von) Differentialgleichungen für ein gegebenes Phänomen aufstellt, wollen wir nun eine geometrische Veranschaulichung geben, die bereits auf erste qualitative Eigenschaften von Lösungen schließen lässt. Dies ist insbesondere dann hilfreich, wenn keine explizite Lösungsformel bekannt ist (was bereits für manche Gleichungen erster Ordnung der Fall ist). Aufgrund der Ordnungsreduktion aus Satz 1.16 beschränken wir uns hier im Wesentlichen auf Gleichungen erster Ordnung, und damit eine Veranschaulichung in zwei Dimensionen möglich ist, betrachten wir nun die beiden Fälle von skalaren Gleichungen sowie von Systemen von zwei autonomen Gleichungen, jeweils in expliziter Form. Dabei führen wir auch einige wichtige Begriffe zur geometrischen Beschreibung von Differentialgleichungen und den zugehörigen Lösungskurven ein.

Definition 1.21. *Seien $N \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^{1+N}$ eine Menge und $f\colon D \to \mathbb{R}^N$ eine stetige Strukturfunkion. Für die explizite gewöhnliche Differentialgleichung*

$$u' = f(t, u)$$

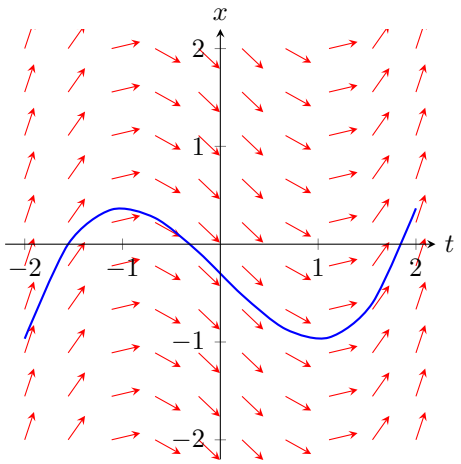
nennt man f auch Steigung *oder ein* Steigungsfeld *auf D, da für Lösungen u der Gleichung die Steigung u' an jedem Punkt $(t, u(t)) \in D$ im Graphen von u mit dem Steigungsfeld $f(t, u(t))$ übereinstimmt. Als* Isoklinen *bezeichnet man die Kurven, auf denen das Steigungsfeld konstant ist, die also von der Form*

$$\big\{(t, x) \in D\colon f(t, x) = c\big\}$$

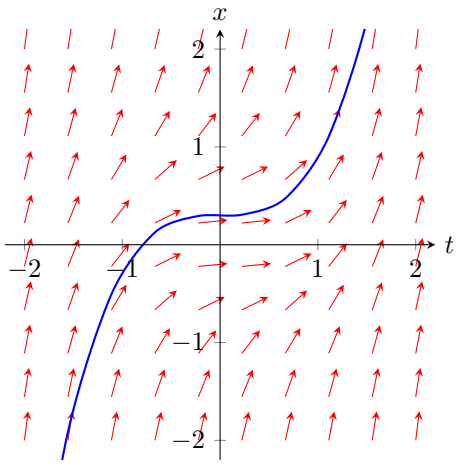
für einen Vektor $c \in \mathbb{R}^N$ sind. Betrachtet man die Gleichung hinsichtlich der Lösungskurve (also dem Graph von u), so ist der Vektor $(1, u'(t)) = (1, f(t, u(t))$ tangential und dementsprechend bezeichnet man die Abbildung, die jedem $(t, x) \in D$ den auf einheitliche Länge normierten Richtungsvektor $(1, f(t, x))$ zuweist, als Richtungsfeld.

Skalare gewöhnliche Differentialgleichungen (erster Ordnung) in expliziter Form. Im Fall skalarer Gleichungen mit $N = 1$ handelt es sich bei D um eine zweidimensionale Menge, auf der man das Richtungsfeld graphisch darstellen kann. Wenn man das Richtungsfeld eingezeichnet hat, kann man versuchen, eine Lösungskurve einzupassen, die an jedem Punkt tangential am vorgeschriebenen Richtungsfeld ist. Exemplarisch machen wir dies hier für die zwei Beispiele $f(t, x) = t^2 - 1$ und $f(t, x) = t^2 + x^2$, mit jeweils einer eingepassten Lösungskurve.

$u' = t^2 - 1$



$u' = t^2 + u^2$



Im ersten Beispiel $f(t,x) = t^2 - 1$ sind die Isoklinen die vertikalen Geraden $\{(t,x)\colon x \in \mathbb{R}\}$ und die allgemeine Lösung ist $u(t) = t^3/3 - t + c$ mit einer freien Konstante $c \in \mathbb{R}$. Das zweite Beispiel ist eine Riccati-Gleichung und wesentlich interessanter, da ihre allgemeine Lösung nicht elementar bekannt ist. Die Isoklinen sind hier Kreise mit dem Ursprung als Mittelpunkt.

Das hier vorgestellte "Einpassen" von Lösungen werden wir später wieder aufgreifen, wenn wir mithilfe des Richtungsfeldes zunächst Näherungslösungen konstruieren und damit dann die Existenz von Lösungen beweisen. Neben dem allgemeinen Aussehen kann man jedoch noch weitere Eigenschaften der Lösungen ablesen. Wenn man etwa die Isokline zum Wert 0 einzeichnet, so kann man die Bereiche unterscheiden, in denen die Lösungen wachsen oder fallen. Differenziert man ferner die Gleichung nach t, so erhält man

$$u'' = \frac{\partial f(t,u)}{\partial t} + \frac{\partial f(t,u)}{\partial u} u' = \frac{\partial f(t,u)}{\partial t} + \frac{\partial f(t,u)}{\partial u} f(t,u)$$

und kann so auch die Bereiche unterscheiden, in denen die Lösungen konvex bzw. konkav sind.

System von zwei autonomen gewöhnlichen Differentialgleichungen (erster Ordnung) in expliziter Form. Hier betrachten wir eine Strukturfunktion $f\colon D' \to \mathbb{R}^2$ für eine offene Menge $D' \subset \mathbb{R}^2$, die nicht explizit von der t-Variable abhängt. Aus Lemma 1.11 wissen wir bereits die Translationsinvarianz von Lösungen, also dass mit $u(t)$ auch $u(t-t_0)$ eine Lösung ist (auf einem entsprechend um t_0 verschobenem Existenzintervall). Über einen geometrischen Zugang kann man zwar nicht die genaue Abhängigkeit von t, jedoch die angenommenen Werte von Lösungen veranschaulichen. Dazu führen wir die folgende allgemeine Terminologie ein:

Definition 1.22. *Seien $k, N \in \mathbb{N}$ und eine gewöhnliche Differentialgleichung von Ordnung k und Dimension N mit Lösung $u\colon I \to \mathbb{R}^N$ gegeben. Man nennt $\mathbb{R}^{kN}$ als Wertebereich von $(u, u', \ldots, u^{(k-1)})$ den* Phasenraum *der Differentialgleichung, und $\mathbb{R}^{1+kN}$ als Wertebereich von $(t, u, u', \ldots, u^{(k-1)})$ den* erweiterter Phasenraum*. Ferner bezeichnet man die Darstellung der Lösungen im Phasenraum oder erweiterten Phasenraum als* Phasenraumportrait *und die von einer Lösung angenommenen Werte als* Trajektorie (*oder* Orbit *oder* Bahnkurve)*.*

Für die hier betrachteten zwei autonome Gleichungen erster Ordnung

$$\begin{cases} u_1' = & f_1(u_1, u_2) \\ u_2' = & f_2(u_1, u_2) \end{cases}$$

kann im Phasenraum das Vektorfeld f und Trajektorien von Lösungen noch gut veranschaulicht werden. Das Vektorfeld zeichnet man so ein, dass für jeden Punkt $x \in D'$ der Richtungsvektor $f(x)$ eingezeichnet wird (es wird hier also nicht nur die Richtung, sondern durch die Länge des Vektors auch die Geschwindigkeit dargestellt), zur besseren Darstellung gegebenenfalls um einen festen Faktor verkürzt. Wenn man Trajektorien von Lösungen einzeichnet, so müssen diese wieder in allen Punkten $x \in D'$ tangential an den Richtungsvektor $f(x)$ sein. Da man die Geschwindigkeit der Lösung jedoch nur indirekt einzeichnen könnte (etwa durch Pfeile in Umlaufrichtung nach jeweils gleichen Zeitintervallen, so dass viele bzw. wenige Pfeile dicht beieinander für langsam bzw. schnelle Durchlaufgeschwindigkeit stehen), kann man von den so eingezeichneten Kurven jedoch nicht direkt auf Lösungen schließen. Nicht jede Funktion, die diese Werte annimmt, ist tatsächlich eine Lösung: ist eine Lösung gegeben, so ändert sich durch Umparametrisierung der Wertebereich (und damit die Trajektorie) nicht, jedoch wird die Lösungseigenschaft zerstört.

Grundsätzlich lassen sich aus solchen Phasenraumportraits weitere Eigenschaften von Lösungen ablesen, und später werden wir uns insbesondere mit Periodizität und Stabilität genauer beschäftigen. Wie im Fall skalarer Gleichungen kann man auch die Monotoniebereiche ablesen, beispielsweise ist auf der Teilmenge

$$\{x \in D'\colon f_1(x) > 0\}$$

die erste Lösungskomponente u_1 streng monoton wachsend, und die zweite Lösungskomponente u_2 auf der Teilmenge

$$\{x \in D'\colon f_2(x) > 0\}.$$

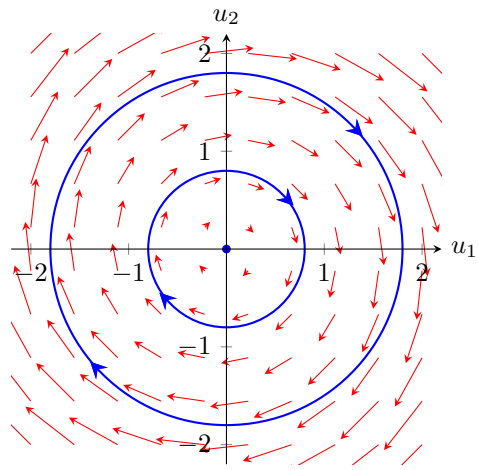
Als Beispiel zeichnen wir das Vektorfeld und einige Trajektorien mit Umlaufrichtung für das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{cases} u_1' = & u_2 \\ u_2' = & -u_1 \end{cases}$$

in den Phasenraum $\mathbb{R}^2$ ein. Die allgemeine Lösung ist

$$u_1 = c\sin(t)\,, \qquad u_2 = c\cos(t)$$

für einen freien Parameter $c \in \mathbb{R}$, und damit insbesondere eine periodische Funktion. Dies kann man aus der Zeichnung dadurch ablesen, dass die Trajektorien geschlossene Kurven sind.



Bemerkung 1.23 (Variante für skalare autonome Gleichungen zweiter Ordnung)**.** *Ähnlich kann man auch skalare, autonome gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung*

$$u'' = f(u, u')$$

mit $f\colon D' \to \mathbb{R}$ *und* $D' \subset \mathbb{R}^2$ *einer offenen Menge geometrisch im Phasenraum veranschaulichen, wobei der Phasenraum nun dem Wertebereich von* (u, u') *entspricht. Mithilfe von Satz* 1.16 *reduziert man dafür die Gleichung zunächst auf das System von zwei autonomen Gleichungen erster Ordnung*

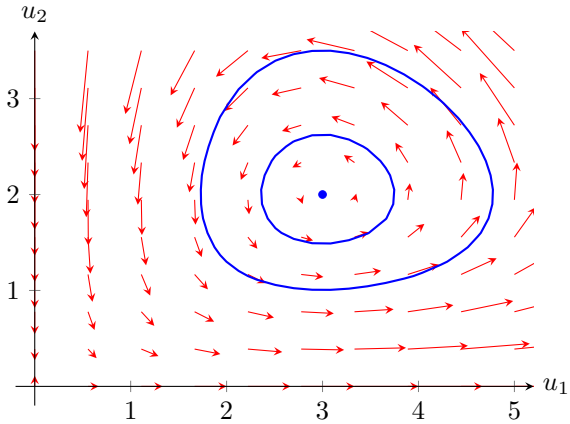
$$\begin{cases} u_1' = & u_2 \\ u_2' = & f(u_1, u_2) \end{cases}$$

und zeichnet dann das Vektorfeld $(x_2, f(x_1, x_2))$ *in die* (u_1, u_2)*-Ebene (also* (u, u')*-Ebene) ein. Für die Differentialgleichung* $u'' = -u$ *aus Beispiel* 1.8 (v) *erhält man gerade das obige Beispiel (und muss in der Achsenbeschriftung nur* (u_1, u_2) *durch* (u, u') *ersetzen).*

Auch für das im vorherigen Abschnitt vorgestellten Räuber-Beute Modell

$$\begin{cases} u_1' = & 2u_1 - u_1 u_2\,, \\ u_2' = & -3u_2 + u_1 u_2\,, \end{cases}$$

bei dem die Population u_1 von Beute in Relation zur Population u_2 von Räubern gesetzt wird, kann man ein Phasenraumportrait erstellen und so erste qualitative Eigenschaften der Lösungen ablesen, etwa die Monotoniebereiche der einzelnen Lösungskomponenten u_1 und u_2. Die Lösung kann man hier nicht in geschlossener Form angeben, jedoch werden wir später sehen, dass es sich bei den Trajektorien um geschlossene Kurven handelt.



Kapitel 2

Elementare Lösungsmethoden für spezielle Gleichungen

Häufig ist es nicht möglich, eine oder gar alle Lösungen zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung in geschlossener Form anzugeben. Bevor wir uns mit allgemeinerer Theorie zu gewöhnlichen Differentialgleichungen beschäftigen, wollen wir in diesem Kapitel zunächst einige spezielle Klassen von gewöhnlichen Differentialgleichungen vorstellen, die in Anwendungen häufig vorkommen und die sich mit speziellen Methoden explizit lösen (und damit auch explizit untersuchen) lassen.

2.1 Separation der Variablen

Das erste explizite Lösungsverfahren ist auf skalare Gleichungen erster Ordnung anwendbar, die in der besonderer Struktur vorliegen (oder durch elementare Umformungen auf eine solche Form gebracht werden können), nämlich dass auf der einen Seite der Gleichung nur eine Funktion von der unabhängigen Variable steht, während auf der anderen Seite der Gleichung die Zeitableitung einer Funktion nur von der abhängigen Variable steht.

Definition 2.1. *Eine* gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten (oder separierten) Variablen *ist eine Gleichung der Form*

$$f(u)u' = b(t) \qquad \text{auf } I\,,$$

mit Funktionen $f\colon J \to \mathbb{R}$ *und* $b\colon I \to \mathbb{R}$ *(für Intervalle* $I, J \subset \mathbb{R}$*).*

Anfangswertprobleme zu gewöhnlichen Differentialgleichungen mit getrennten Variablen lassen sich im Wesentlichen durch Integration lösen. Probleme können lediglich entstehen, wenn die Stetigkeitsannahme an die involvierten Funktionen nicht erfüllt sind, der Vorfaktor vor der höchsten Ableitung verschwindet, oder die Werte von u das zulässige Intervall J verlassen.

Satz 2.2 (über Gleichungen mit getrennten Variablen)**.** *Für offene Intervalle* $I, J \subset \mathbb{R}$*,* $f \in C(J, \mathbb{R})$*,* $b \in C(I, \mathbb{R})$*,* $t_0 \in I$ *und* $x_0 \in J$ *betrachten wir das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} f(u)u' &= b(t) \qquad \text{auf } I \\ u(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

und bezeichnen mit F *bzw.* B *Stammfunktionen zu* f *bzw.* b*.*

(i) *Eine differenzierbare Funktion* $u\colon I \to J$ *ist genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems, falls sie die Gleichung*

$$F(u(t)) - F(x_0) = B(t) - B(t_0) \qquad \text{für } t \in I \tag{2.1}$$

sowie die Anfangsbedingung $u(t_0) = x_0$ *erfüllt.*

(ii) *Hat f keine Nullstelle in J, so existiert die Umkehrfunktion $F^{-1}\colon F(J) \to \mathbb{R}$ zu F auf $F(J)$ und ist differenzierbar, und es gibt ferner eine Umgebung $\tilde{I} \subset I$ von t_0, so dass jede Lösung des Anfangswertproblems gegeben ist durch*

$$u(t) = F^{-1}\big(B(t) - B(t_0) + F(x_0)\big) \qquad \textit{für } t \in \tilde{I}\,.$$

Beweis. Beweis von Aussage (i): Falls $u\colon I \to J$ differenzierbar ist und die Gleichung (2.1) erfüllt, so folgt mit der Kettenregel

$$f(u(t))u'(t) = \frac{d}{dt}\big(F(u(t)) - F(x_0)\big) = \frac{d}{dt}\big(B(t) - B(t_0)\big) = b(t)$$

für $t \in I$, also ist u eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung, und die Anfangsbedingung ist nach Voraussetzung erfüllt. Ist umgekehrt $u\colon I \to J$ eine Lösung des Anfangswertproblems, so folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned} F(u(t)) - F(x_0) &= \int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds} F(u(s))\, ds = \int_{t_0}^{t} f(u(s))u'(s)\, ds \\ &= \int_{t_0}^{t} b(s)\, ds = B(t) - B(t_0) \end{aligned}$$

für $t \in I$, also die Gleichung (2.1), und $u(t_0) = x_0$ ist ebenfalls nach Voraussetzung erfüllt.

Beweis von Aussage (ii): Hat f keine Nullstelle in J, so ist F strikt monoton mit $F' = f \neq 0$ auf J, und der Umkehrsatz liefert die Existenz und Differenzierbarkeit von F^{-1} auf $F(J)$. Nun betrachten wir auf I die Funktion

$$t \mapsto B(t) - B(t_0) + F(x_0)\,.$$

Sie ist wohldefiniert, und aufgrund der strikten Monotonie von F sowie der Offenheit von J können wir eine Umgebung $\tilde{I} \subset I$ um t_0 finden, so dass

$$B(t) - B(t_0) + F(x_0) \in F(J) \quad \text{für } t \in \tilde{I} \text{ gilt.}$$

Damit können wir über

$$u(t) = F^{-1}\big(B(t) - B(t_0) + F(x_0)\big)$$

eine Funktion $u\colon \tilde{I} \to J$ definieren. Diese erfüllt offensichtlich die Anfangsbedingung

$$u(t_0) = F^{-1}\big(B(t_0) - B(t_0) + F(x_0)\big) = x_0\,,$$

und mit dem Satz von der Umkehrabbildung und mit der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{d}{dt} F^{-1}\big(B(t) - B(t_0) + F(x_0)\big) \\ &= \big[F'\big(\underbrace{F^{-1}(B(t) - B(t_0) + F(x_0))}_{=u(t)}\big)\big]^{-1} b(t) = \big[f(u(t))\big]^{-1} b(t)\,, \end{aligned}$$

also gilt $f(u(t))u'(t) = b(t)$ für $t \in \tilde{I}$. Die Umkehrung ist mit (i) klar. □

Bemerkungen 2.3.

(i) *Typischerweise lässt sich der Satz nicht direkt anwenden, sondern man muss die gewöhnliche Differentialgleichung erst in die Form mit getrennten Variablen bringen (gegebenenfalls sind hier auch Fallunterscheidungen notwendig). Hat die Strukturfunktion f eine Nullstelle, gilt aber $f(x_0) \neq 0$, so kann man f auf eine Umgebung von x_0 einschränken, auf der f nicht verschwindet und den Satz in einer lokalen Variante anwenden.*

(ii) *Manchmal ist die Aussage des Satzes für gewöhnliche Differentialgleichungen der Form*

$$u' = b(t)g(u) \qquad \text{auf } I$$

mit stetigen Funktionen $g\colon J \to \mathbb{R}$, $b\colon I \to \mathbb{R}$ *(und* I, J *Intervallen in* $\mathbb{R}$*) formuliert. Ist* $g(x_0) \neq 0$, *so lässt sich die Gleichung zumindest lokal auf die Gestalt in Satz* (2.2) *bringen. Ist dagegen* $g(x_0) = 0$, *so ist* $u \equiv x_0$ *eine auf dem ganzen Intervall* I *definierte Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems, es kann hier jedoch noch weitere Lösungen geben.*

(iii) *Ist eine gewöhnliche Differentialgleichung gegeben, die auf die Form mit separierten Variablen gebracht werden kann, so ist es typischerweise das einfachste, für die Bestimmung sowohl der allgemeinen Lösung als auch einer speziellen Lösung zu vorgegebenen Anfangswerten die einzelnen Schritte des Beweises konkret auszuführen. Für die allgemeine Lösung bedeutet das, folgendermaßen vorzugehen:*

(1) *Bringe die Gleichung zunächst auf die Form* $f(u)u' = b(t)$ *(und achte bei der Umformung auf besondere Lösungen);*

(2) *Integriere beide Seiten bis* t *und erhalte damit die Identität der unbestimmten Integrale*

$$\int^t f(u(s))u'(s)\,ds = \int^t b(s)\,ds\,.$$

(3) *Führe auf der linken Seite eine Variablensubstitution durch, so dass man nach der abhängigen Variable integriert:*

$$\int^{u(t)} f(u)\,du = \int^t b(s)\,ds\,.$$

(4) *Integriere nun beide Seiten (und beachte dabei, dass eine Integrationskonstante* c *auftritt):*

$$F(u(t)) = B(t) + c\,.$$

(5) *Löse die Gleichung nach* $u(t)$ *auf (solange* $B(t)+c$ *im Definitionsbereich der Umkehrfunktion von* F *liegt)*

$$u(t) = F^{-1}\big(B(t) + c\big)$$

und bestimme dabei auch, für welche Zeiten t *die Funktion* u *definiert ist oder stetig fortgesetzt werden kann.*

Für das Lösen eines speziellen Anfangswertproblems mit $u(t_0) = x_0$ *müssen dagegen, wie oben im Beweis von Satz* 2.2, *die unbestimmten Integrale durch bestimmte Integrale über* $[t_0, t]$ *(bzw. über* $[u(t_0), u(t)]$ *nach der Variablensubstitution) ersetzt werden und man erhält dann mit den gleichen Umformungen wie für die Bestimmung der allgemeinen Lösung die im Satz gewonnene Lösungsformel* $u(t) = F^{-1}(B(t) - B(t_0) + F(x_0))$.

(iv) *Die Methode der Separation der Variablen funktioniert prinzipiell auch bei manchen gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung (etwa vom Typ* $h(u')u'' = f(u)$*).*

Beispiele 2.4. *Wir lösen mithilfe von Satz* 2.2 *nun Anfangswertprobleme der Form*

$$\begin{cases} u' &= h(t,u)\,, \\ u(t_0) &= x_0\,, \end{cases}$$

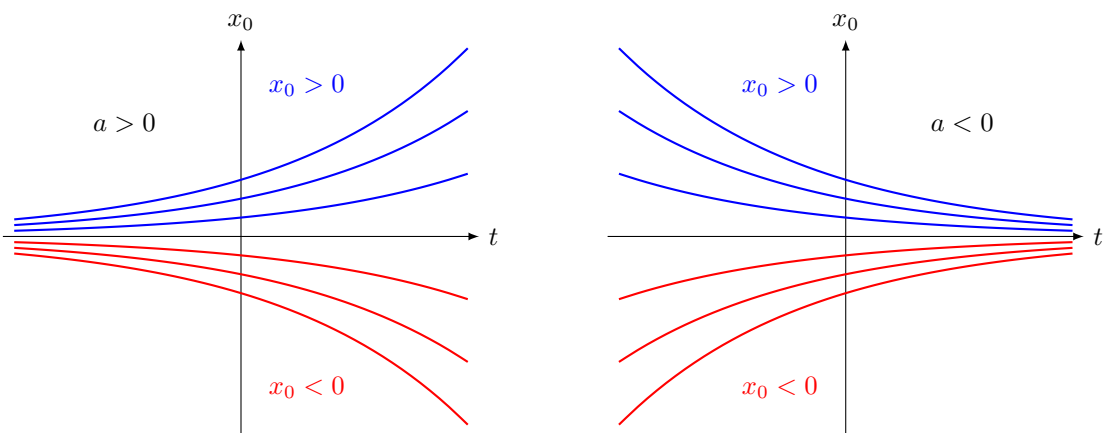
für verschiedene Wahlen von stetigen Funktionen $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *und Anfangsdaten* $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, *d.h. wir bestimmen skalarwertigen Lösungen* u, *die auf Intervallen um* t_0 *definiert sind.*

(i) *Sei* $h(t,u) = au$ *mit einer Variable* $a \in \mathbb{R}$. *Für* $x_0 = 0$ *ist* $u \equiv 0$ *eine zulässige Lösung des Anfangswertproblems. Im Fall* $x_0 \neq 0$ *können wir, zunächst nur lokal (bzw. solange* $u \neq 0$ *erfüllt ist), die Differentialgleichung auf die Form*

$$u^{-1}u' = a$$

bringen, also liegt eine Differentialgleichung mit separierten Variablen mit $f(u) = u^{-1}$ *und* $b(t) \equiv a$ *vor. Es handelt sich bei* f *um eine stetige Funktion auf* $\mathbb{R}^+$ *und auf* $\mathbb{R}^-$ *(mit einer Singularität im Ursprung). Eine Stammfunktion von* f *ist* $F(u) = \log|u|$ *und eine Stammfunktion von* b *ist* $B(t) = at$. *Als Lösung ergibt sich (unter Beachtung der richtigen Vorzeichenwahl, so dass die Anfangsbedingung erfüllt ist)*

$$u(t) = x_0 \exp(at - at_0) \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}\,.$$



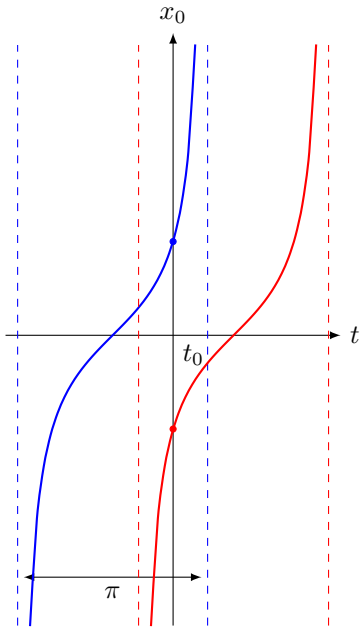
Wir beobachten insbesondere, dass die Lösungen zu $x_0 \neq 0$ *immer echt positiv oder negativ bleiben, die Lösungen also niemals den kritischen Wert* 0 *erreichen, so dass wir keine Einschränkung auf eine Umgebung der Startzeit* t_0 *machen müssen. Die Lösungen existieren damit für alle Zeiten und sind sogar eindeutig, unabhängig von der Wahl der Anfangsbedingung.*

(ii) *Sei* $h(t,u) = 1 + u^2$ *(vgl. Beispiel* 1.8*).*

Hier liegt nach Division durch (die immer positive Größe) $1 + u^2$ *eine Differentialgleichung mit separierten Variablen mit* $f(u) = (1+u^2)^{-1}$ *und* $b(t) \equiv 1$ *vor. Eine Stammfunktion von* f *ist* $F(u) = \arctan(u)$ *und eine Stammfunktion von* b *ist* $B(t) = t$. *Da* F *nur Werte im Intervall* $(-\pi/2, \pi/2)$ *annimmt, existiert die Umkehrfunktion* F^{-1} *nur auf diesem Intervall der Länge* π *und wir erhalten mit der Formel aus Satz* 2.2 *als Lösung des Anfangswertproblems*

$$u(t) = \tan\big(t - t_0 + \arctan(x_0)\big)$$

für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$, *so dass die Ungleichung* $|t - t_0 + \arctan(x_0)| < \pi/2$ *erfüllt ist.*
Auch hier stellen wir die eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems fest, unabhängig von der Wahl der Anfangsbedingung, jedoch existieren im Unterschied zum ersten Beispiel alle Lösungen nur für ein endliches Zeitintervall der Länge π.



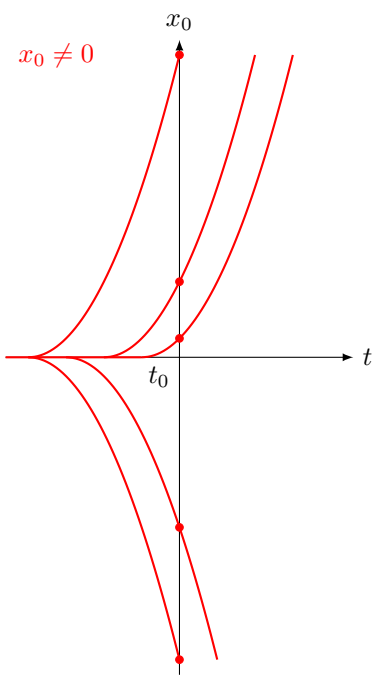
(iii) *Sei* $h(t,u) = 2\,\mathrm{sign}(u)\sqrt{|u|}$. *Für* $u \neq 0$ *erhalten wir eine Differentialgleichung mit separierten Variablen mit* $f(u) = (2\,\mathrm{sign}(u)\sqrt{|u|})^{-1}$ *und* $b(t) \equiv 1$. *Eine Stammfunktion von* f *ist* $F(u) = \sqrt{|u|}$ *und eine Stammfunktion von* b *ist* $B(t) = t$. *Für* $x_0 \neq 0$ *erhalten wir als eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (wieder unter Beachtung des richtigen Vorzeichens)*

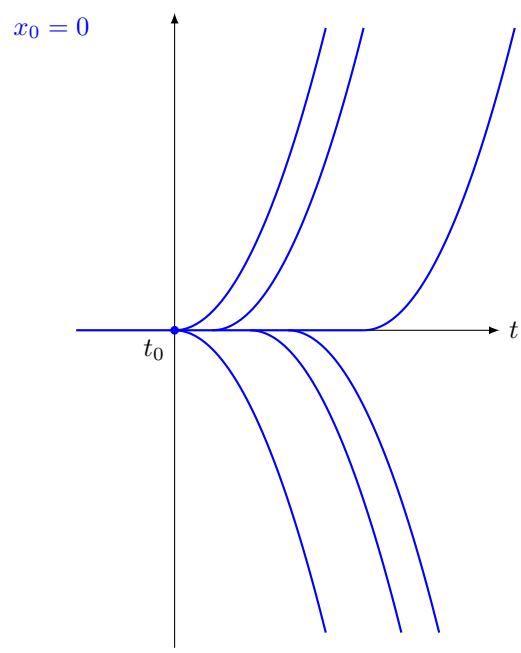
$$u(t) = \mathrm{sign}(x_0)(t - t_0 + \sqrt{|x_0|})^2$$

für Zeiten $t > t_0 - \sqrt{|x_0|}$. *Für Zeiten* $t \leq t_0 - \sqrt{|x_0|}$ *kann man die Lösung durch* 0 *fortsetzen, so dass man also für alle* $x_0 \neq 0$ *eine eindeutige, auf ganz* $\mathbb{R}$ *definierte Lösung des Anfangswertproblems findet. Im Fall* $x_0 = 0$ *ist die triviale Lösung des Anfangswertproblems durch* $u \equiv 0$ *gegeben, jedoch lösen auch alle Funktionen der Form*

$$u(t) = \pm \mathbb{1}_{[t_1,\infty)}(t)(t - t_1)^2$$

für $t \in \mathbb{R}$ *und jede beliebige Wahl von* $t_1 \geq t_0$ *die Differentialgleichung. Für die Anfangsbedingung* $x_0 = 0$ *sind die Lösungen des Anfangswertproblems also nicht eindeutig, und tatsächlich gibt es sogar unendlich viele Lösungen (von denen die beiden Lösungen mit positivem bzw. negativem Vorzeichen für die Wahl* $t_1 = t_0$ *in gewisser Weise ausgezeichnet sind, da alle anderen möglichen Lösungen zwischen diesen beiden Lösungen liegen).*

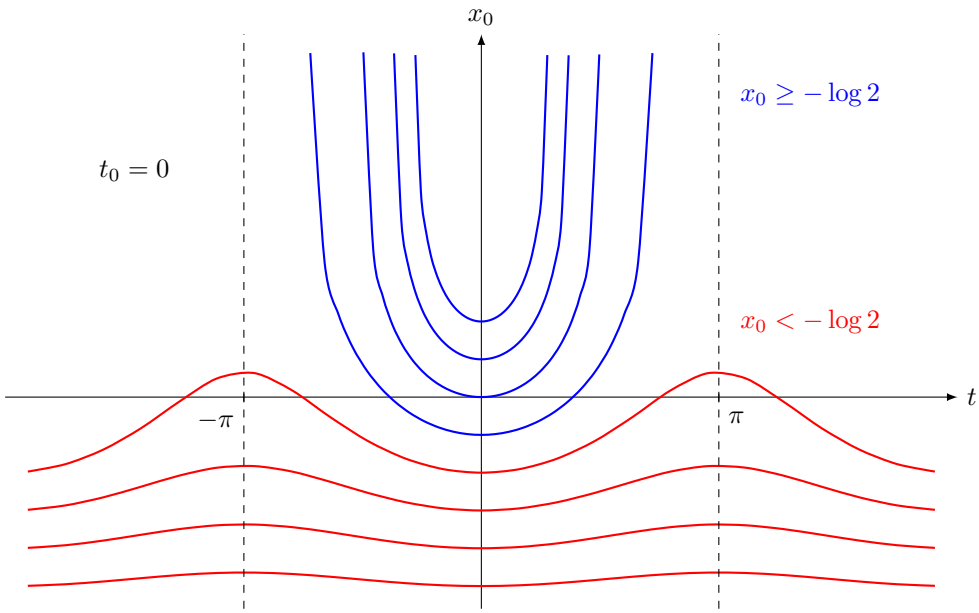




(iv) *Sei* $h(t,u) = \exp(u)\sin(t)$. *Da* $\exp(u)$ *immer echt positiv ist, erhalten wir nach Umformung eine Differentialgleichung mit separierten Variablen mit* $f(u) = \exp(-u)$ *und* $b(t) = \sin(t)$. *Eine Stammfunktion von* f *ist* $F(u) = -\exp(-u)$ *und eine Stammfunktion von* b *ist* $B(t) = -\cos(t)$. *Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems ist daher gegeben durch die Funktion*

$$u(t) = -\log\big(\cos(t) - \cos(t_0) + \exp(-x_0)\big)$$

für Zeiten t *im zusammenhängenden Intervall* $\tilde{I}$, *so dass* $\cos(t) > \cos(t_0) - \exp(-x_0)$ *für alle* $t \in \tilde{I}$ *erfüllt ist. Je nach Wahl der Anfangsbedingung kommt es hier zu sehr unterschiedlichem Verhalten der Lösungen, und zwar sowohl hinsichtlich ihres qualitativen Verhaltens als auch bezüglich der Länge des Existenzintervalls.*



- *Ist* $\cos(t_0) - \exp(-x_0) < -1$ *oder äquivalent* $x_0 < -\log(1+\cos(t_0))$*, so existieren die Lösungen für alle Zeiten und sie sind* 2π*-periodisch (denn mit* $u(t)$ *ist auch* $u(t+2k\pi)$ *für jedes* $k \in \mathbb{Z}$ *eine Lösung).*
- *Ist dagegen* $\cos(t_0) - \exp(-x_0) \in [-1, 1)$ *oder äquivalent* $x_0 \geq -\log(1+\cos(t_0))$*, so existieren die Lösungen nur in einem endlichen Zeitintervall der Länge kleiner als* 2π*. Insbesondere konvergiert die Länge des Existenzintervalls für* $x_0 \to \infty$ *und* $t_0 \in 2\pi\mathbb{Z}$ *gegen* 0*. Bei den Lösungen mit endlichem, maximalen Zeitintervall wird die Lösung sowie ihre Steigung bei den Grenzen des Existenzintervalls außerdem unendlich, es gibt also eine Explosion der Lösung in endlicher Zeit.*

2.2 Skalare lineare Gleichungen erster Ordnung

Wir werden uns später noch mit allgemeineren linearen Differentialgleichungen (und insbesondere Systemen linearer Differentialgleichungen) beschäftigen, wollen hier aber schon einige wichtige Ideen einführen sowie einen konkreten Lösungsalgorithmus für den Fall skalarer Gleichungen (auch höherer Ordnung) erläutern. Zunächst betrachten wir die (explizite) gewöhnliche Differentialgleichung

$$u' + a(t)u = b(t)$$

in Normalform auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, mit einer (skalaren) Koeffizientenfunktion $a\colon I \to \mathbb{R}$ und einer Inhomogenität $b\colon I \to \mathbb{R}$. Vorausgesetzt, diese beiden Funktionen sind stetig, so lassen sich zugehörige Anfangswertprobleme wieder durch Integration lösen.

Satz 2.5. *Für ein Intervall* $I \subset \mathbb{R}$*,* $a, b \in C(I)$*,* $t_0 \in I$ *und* $x_0 \in \mathbb{R}$ *betrachten wir das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} u' + a(t)u &= b(t) \qquad \text{auf } I\,, \\ u(t_0) &= x_0\,. \end{cases}$$

Dann gelten:

(i) (homogener Fall) *Für* $b \equiv 0$ *gibt es eine eindeutige Lösung* $u\colon I \to \mathbb{R}$ *des Anfangswertproblems, die für* $t \in I$ *gegeben ist durch*

$$u(t) = x_0 \exp\big(-A_0(t)\big) \qquad \text{mit } A_0(t) := \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\,.$$

(ii) (inhomogener Fall) *Im allgemeinen Fall gibt es eine eindeutige Lösung* $u\colon I \to \mathbb{R}$ *des Anfangswertproblems, die für* $t \in I$ *gegeben ist durch*

$$u(t) = \exp\big(-A_0(t)\big)\Big[x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)\exp\big(A_0(s)\big)\,ds\Big].$$

Beweis. Beweis von Aussage (i): Auf die Gestalt der Lösung u kommt man im Wesentlichen über den Ansatz mit Separation der Variablen (in der Notation aus der Bemerkung 2.3 mit $g(u) = u$ und $b(t) = -a(t)$), man muss aber noch aufpassen, ob g eine Nullstelle hat. Hier müssen wir nun zum einen zeigen, dass das angegebene u eine Lösung des Anfangswertproblems ist, zum anderen, dass es keine weiteren Lösungen gibt. Für erstes berechnen wir für die in (i) definierte Funktion u mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung sowie der Kettenregel

$$u'(t) = x_0\exp\big(-A_0(t)\big)(-a(t)) = -u(t)a(t)$$

für $t \in I$, also löst u die Differentialgleichung, und wegen $u(t_0) = x_0$ ist auch die geforderte Anfangsbedingung erfüllt. Ist umgekehrt u eine Lösung des Anfangswertproblems, so betrachten wir die Funktion $\exp(A_0(t))u(t)$ und berechnen mit der Produktregel, dem Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und der Kettenregel

$$\begin{aligned}\big[\exp\big(A_0(t)\big)u(t)\big]' &= \exp\big(A_0(t)\big)u'(t) + \exp\big(A_0(t)\big)a(t)u(t)\\ &= \exp\big(A_0(t)\big)\big[u'(t) + a(t)u(t)\big] = 0\end{aligned}$$

für $t \in I$, also muss $\exp(A_0(t))u(t)$ nach dem Konstanzsatz auf ganz I konstant (und damit gleich x_0) sein. Also gilt die behauptete Form $u(t) = x_0\exp(-A_0(t))$ für alle $t \in I$ für die Lösung des Anfangswertproblems.

Beweis von Aussage (ii): Um die Lösung zum Anfangswertproblem für die inhomogene Gleichung zu finden, brauchen wir wegen des Superpositionsprinzips aus Lemma 1.15 lediglich noch eine spezielle Lösungen des inhomogenen Problems zu finden, die Anfangswert 0 bei t_0 hat (da die bisher gefundene homogene Lösung bereits die Anfangsbedingung erfüllt). Dazu verwenden wir den Ansatz der *Variation der Konstanten*, in dem man von der Lösung des homogenen Problems ausgeht, aber die Konstante (zuvor x_0) als unbekannte Funktion (in t) annimmt, d.h. wir starten mit dem Ansatz

$$u_{par}(t) := C(t)\exp\big(-A_0(t)\big)$$

für $t \in I$ und versuchen die unbekannte Funktion $C(t)$ so zu wählen, dass die inhomogene Gleichung erfüllt ist. Indem wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung einsetzen, leiten wir für $C(t)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung her:

$$\begin{aligned}b(t) &\overset{!}{=} u'_{par}(t) + a(t)u_{par}(t)\\ &= C'(t)\exp\big(-A_0(t)\big) - C(t)\exp\big(-A_0(t)\big)a(t) + a(t)u_{par}(t)\\ &= C'(t)\exp\big(-A_0(t)\big),\end{aligned}$$

also muss $C'(t) = b(t)\exp(A_0(t))$ für alle $t \in I$ gelten. Diese Differentialgleichung mit Anfangsbedingung $C(t_0) = u_{par}(t_0) = 0$ lässt sich durch Integration lösen und wir erhalten

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)\exp\big(A_0(s)\big)\,ds.$$

Eingesetzt in den Ansatz folgt somit

$$u_{par}(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)\exp\big(A_0(s)\big)\,ds\exp\big(-A_0(t)\big).$$

Zusammen mit der homogenen Lösung aus (i) ergibt sich also direkt, dass das angegebene u eine Lösung ist. Alternativ hätten wir, wie in (i), auch einfach die Lösungseigenschaft nachrechnen können, dies erklärt aber nicht, was die Strategie für die Herleitung einer Lösung ist.

Zum Abschluss müssen wir noch nachweisen, dass die so gefundene Lösung tatsächlich die einzige Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems ist. Dafür nehmen wir an, dass $\tilde{u}$ eine zweite Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems ist. Aufgrund der Linearität der Gleichung erfüllt die Differenz $v := u - \tilde{u}$ dann die homogene Gleichung

$$v' = u' - \tilde{u}' = -a(t)(u - \tilde{u}) = -a(t)v$$

mit Anfangswert $v(t_0) = 0$, also muss $v \equiv 0$ nach Aussage (i) gelten und die Eindeutigkeit der Lösung ist bewiesen. □

Bemerkung 2.6. *Um insbesondere keine Vorzeichenfehler zu machen, ist es hier – wie bei den Differentialgleichungen in separierter Form – das einfachste, die einzelnen Schritte des Beweises durchzugehen, um ein konkretes Anfangswertproblem für eine lineare Differentialgleichung zu lösen. Das bedeutet:*

(1) *Betrachte zunächst für die homogene Gleichung das Anfangswertproblem $u'_{hom} + a(t)u_{hom} = 0$ mit Anfangswert $u_{hom}(t_0) = x_0$ und löse dies (für $x_0 \neq 0$, ansonsten gilt trivial $u_{hom} \equiv 0$) mittels Separation der Variablen:*

$$\int_{x_0}^{u_{hom}(t)} \frac{1}{u}\, du = \int_{t_0}^{t} \frac{u'_{hom}(t)}{u_{hom}(t)}\, dt = -\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\,,$$

also

$$\log\left|\frac{u_{hom}(t)}{x_0}\right| = -A_0(t) \quad \textit{bzw.} \quad u_{hom}(t) = x_0 \exp(-A_0(t))\,.$$

(2) *Betrachte dann für die inhomogene Gleichung das Anfangswertproblem $u'_{par} + a(t)u_{par} = b(t)$ mit Anfangswert $u_{par}(t_0) = 0$ und löse diese mithilfe des Ansatzes $u_{par}(t) = C(t)\exp(-A_0(t))$ der Variation der Konstanten. Dazu leite eine Gleichung für die unbekannte Funktion $C(t)$ her:*

$$\begin{aligned} b(t) &= u'_{par}(t) + a(t)u_{par}(t) \\ &= C'(t)\exp(-A_0(t)) + C(t)\frac{d}{dt}\exp(-A_0(t)) + C(t)a(t)\exp(-A_0(t)) \\ &= C'(t)\exp(-A_0(t)) \end{aligned}$$

und löse diese mittels Integration (unter der Berücksichtigung der Anfangsbedingung)

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)\exp(A_0(s))\, ds\,.$$

Aufgrund des speziellen Ansatzes erhalten wir dann für die partikuläre Lösung die Formel

$$u_{par}(t) = \exp(-A_0(t)) \int_{t_0}^{t} b(s)\exp(A_0(s))\, ds\,.$$

(3) *Die gesuchte Lösung ergibt sich dann mithilfe des Superpositionsprinzips (Linearität der Gleichung!) als Summe der Lösungen der Anfangswertprobleme der homogenen sowie der inhomogenen Gleichung*

$$u(t) = u_{hom}(t) + u_{par}(t) = x_0 \exp(-A_0(t)) + \exp(-A_0(t)) \int_{t_0}^{t} b(s)\exp(A_0(s))\, ds\,.$$

Beispiel 2.7. *Wir betrachten das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} u' - 2t^{-1}u &= t\log t \qquad \text{auf } \mathbb{R}^+\,, \\ u(t_0) &= x_0\,, \end{cases}$$

für $t_0 \in \mathbb{R}^+$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Hier können wir Satz 2.5 (i) mit $a(t) = -2t^{-1}$ und entsprechender Stammfunktion $A_0(t) = -2\log(t/t_0)$ für $t \in \mathbb{R}^+$ anwenden, und wir erhalten für die Lösung des Anfangswertproblems der homogenen Gleichung die Darstellungsformel

$$u_{hom}(t) = x_0 \exp\Big(2\log\Big(\frac{t}{t_0}\Big)\Big) = x_0\Big(\frac{t}{t_0}\Big)^2\,.$$

Um die Lösung des Anfangswertproblem für die inhomogene Gleichung zu bestimmen, berechnen wir mit $b(t) = t\log t$ das Integral

$$\int_{t_0}^t b(s)\exp(A_0(s))\,ds = t_0^2\int_{t_0}^t s^{-1}\log s\,ds = \frac{1}{2}t_0^2\big[(\log t)^2 - (\log t_0)^2\big]$$

und erhalten damit insgesamt

$$u(t) = x_0\Big(\frac{t}{t_0}\Big)^2 + \frac{1}{2}t^2\big[(\log t)^2 - (\log t_0)^2\big]\,.$$

Den hier vorgestellten *Exponentialansatz* kann man auch für lineare Gleichungen höherer Ordnung verwenden, wenn man konstante Koeffizienten betrachtet (vgl. Übungsblatt 2). In diesem Fall betrachtet man im homogenen Fall die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\mathcal{L}(u) := a_k u^{(k)} + a_{k-1}u^{(k-1)} + \ldots + a_1 u' + a_0 u = 0 \qquad \text{in } I \subset \mathbb{R} \tag{2.2}$$

mit Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$, und verwendet als ersten Lösungsansatz die Funktionen $\exp(\lambda t)$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$. Mithilfe der Identität

$$\mathcal{L}(\exp(\lambda t)) = p(\lambda)\exp(\lambda t)$$

gewinnt man über die Nullstellen des zu $\mathcal{L}$ gehörigen charakteristischen Polynoms p Lösungen der Gleichung in der Form $\exp(\lambda t)$. Falls p mehrfache Nullstellen besitzt, so gibt es jedoch noch weitere Lösungen, von anderer Form. Dazu leitet man beide Seiten von $\mathcal{L}(\exp(\lambda t)) = p(\lambda)\exp(\lambda t)$ partiell nach λ ab und erhält

$$\mathcal{L}(t^j\exp(\lambda t)) = \mathcal{L}\Big(\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\exp(\lambda t)\Big) = \frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\mathcal{L}(\exp(\lambda t)) = \frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\big(p(\lambda)\exp(\lambda t)\big)$$

für $j \in \mathbb{N}$. Ist λ eine mindestens $(j+1)$-fache Nullstelle von p, so verschwindet die rechte Seite und dementsprechende sind Funktionen der Form $t^j\exp(\lambda t)$ ebenfalls Lösungen. Tatsächlich haben wir bereits ein Fundamentalsystem (also eine Basis) des Lösungsraums gefunden (Beweis später im Zusammenhang mit linearen Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung):

Satz 2.8 (Fundamentalsystem für lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten)**.** *Seien $k, \ell \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ mit $a_k \neq 0$ und $\mathcal{L}$ der in (2.2) definierte lineare Differentialoperator. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ eine ℓ-fache reelle Nullstelle des charakteristischen Polynoms zu $\mathcal{L}$, so sind die ℓ Funktionen*

$$\exp(\lambda t)\,, \quad t\exp(\lambda t)\,, \quad \ldots \quad , \quad t^{\ell-1}\exp(\lambda t)$$

linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung (2.2). Ist $\lambda + \mathrm{i}\,\mu$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (und damit auch $\lambda - \mathrm{i}\,\mu$) eine ℓ-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms zu $\mathcal{L}$, so sind die 2ℓ Funktionen

$$\begin{aligned} &\exp(\lambda t)\cos(\mu t)\,, \quad t\exp(\lambda t)\cos(\mu t)\,, \quad \ldots \quad , \quad t^{\ell-1}\exp(\lambda t)\cos(\mu t)\,, \\ &\exp(\lambda t)\sin(\mu t)\,, \quad t\exp(\lambda t)\sin(\mu t)\,, \quad \ldots \quad , \quad t^{\ell-1}\exp(\lambda t)\sin(\mu t) \end{aligned}$$

linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung (2.2). Insgesamt erhält man so durch die k (komplexen) Nullstellen des charakteristischen Polynoms k linear unabhängige Lösungen der Gleichung $\mathcal{L}(u) = 0$, und nennt diese ein Fundamentalsystem *der Gleichung (2.2).*

2.3 Reduktionsverfahren von d'Alembert

Betrachtet man lineare gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung mit allgemeinen (d.h. nicht notwendigerweise konstanten) Koeffizientenfunktionen und einer möglichen Inhomogenität, so erlaubt das Reduktionsverfahren von d'Alembert *unter Kenntnis einer Lösung des homogenen Problems* (etwa durch geschicktes Raten), das Problem um eine Ordnung zu reduzieren.

Satz 2.9 (Reduktionsverfahren von d'Alembert)**.** *Für ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, betrachten wir die allgemeine lineare gewöhnliche Differentialgleichung*

$$\mathcal{L}(u) := a_k(t)u^{(k)} + a_{k-1}(t)u^{(k-1)} + \ldots + a_1(t)u' + a_0(t)u = b(t) \qquad \text{in } I \tag{2.3}$$

von k-ter Ordnung, mit Koeffizientenfunktionen $a_0, a_1, \ldots, a_k \colon I \to \mathbb{R}$ und Inhomogenität $b \colon I \to \mathbb{R}$. Ist $u_{hom} \colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der homogenen Gleichung $\mathcal{L}(u_{hom}) = 0$ in I, dann ist $u := vu_{hom}$ mit $v \colon I \to \mathbb{R}$ genau dann eine Lösung der inhomogenen Gleichung (2.3), wenn $z := v'$ die folgende lineare gewöhnliche Differentialgleichung $(k-1)$-ter Ordnung löst:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \Big[\sum_{\ell=i+1}^{k} a_\ell(t) \binom{\ell}{i+1} u_{hom}^{(\ell-i-1)}(t) \Big] z^{(i)} = b(t) \qquad \text{in } I\,.$$

Beweis. Die Betrachtung der Funktion $u := vu_{hom}$ ist eine Variante des Ansatzes der Variation der Konstanten. Gemäß der Leibnitz-Regel haben die Ableitungen von u die Form

$$u^{(\ell)}(t) = (vu_{hom})^{(\ell)}(t) = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} v^{(j)}(t) u_{hom}^{(\ell-j)}(t)$$

für alle $t \in I$ und $\ell \in \{1, \ldots, k\}$. Setzen wir die Ableitungen in die Gleichung 2.3 ein und vertauschen wir dann die Summationen, so ergibt sich für die Lösungseigenschaft das Kriterium

$$\begin{aligned} b(t) &\overset{!}{=} \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell(t)(vu_{hom})^{(\ell)}(t) = \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{j=0}^{\ell} a_\ell(t) \binom{\ell}{j} v^{(j)}(t) u_{hom}^{(\ell-j)}(t) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \sum_{\ell=j}^{k} a_\ell(t) \binom{\ell}{j} v^{(j)}(t) u_{hom}^{(\ell-j)}(t) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \Big[\sum_{\ell=j}^{k} a_\ell(t) \binom{\ell}{j} u_{hom}^{(\ell-j)}(t) \Big] v^{(j)}(t) + \underbrace{\sum_{\ell=j}^{k} a_\ell(t) u_{hom}^{(\ell)}(t)}_{=0 \text{ nach Annahme}} v(t) \end{aligned}$$

für $t \in I$. Mit der Substitution $j = i + 1$ folgt darauf sofort die Behauptung. □

Bemerkung 2.10. *Das Reduktionsverfahren von d'Alembert hat eine besondere Relevanz für Gleichungen zweiter Ordnung, mit führender konstanter (oder äquivalent überall nicht verschwindender) Koeffizientenfunktion a_2. Für die lineare Gleichung*

$$a_2(t)u'' + a_1(t)u' + a_0(t)u = b(t) \qquad \text{in } I \subset \mathbb{R}$$

besagt der letzte Satz: ist u_{hom} eine Lösung der homogenen Gleichung, so löst $u := vu_{hom}$ die inhomogene Gleichung, falls $z := v'$ die Gleichung

$$a_2(t)u_{hom}(t)z' + \big[a_1(t)u_{hom}(t) + 2a_2(t)u'_{hom}\big]z = b(t) \qquad \text{in } I$$

erfüllt. Verschwinden a_2 und u_{hom} nirgends auf I, so reduziert sich diese Gleichung auf

$$z' + \Big[\frac{a_1(t)}{a_2(t)} + \frac{2u'_{hom}}{u_{hom}}\Big]z = \frac{b(t)}{a_2(t)u_{hom}} \qquad \text{in } I\,,$$

deren eindeutige Lösung (unter Stetigkeitsannahmen an die Koeffizienten) mittels Satz 2.5 bestimmt ist. Die zugehörigen Anfangswertprobleme lassen sich vollkommen analog behandeln, indem man die Anfangswerte von u_{hom} entsprechend anpasst (etwa mit Multiplikation mit einer geeigneten Konstante, was die Lösungseigenschaft erhält).

Beispiele 2.11. *Ohne die Details für alle Rechnung zu geben, geben wir hier die wichtigsten Zwischenschritte für zwei Beispiele mit linearen Gleichungen zweiter Ordnung an.*

(i) *Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung*

$$u'' - \cos(t)u' + \sin(t)u = b(t)$$

und raten als Lösung des homogenen Problems

$$u_{hom}(t) = \exp(\sin(t))\,.$$

Um das inhomogene Problem zu lösen, brauchen wir nur noch die folgende gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für z zu lösen:

$$z' + \big[-\cos(t) + 2\cos(t)\big]z = z' + \cos(t)z \stackrel{!}{=} b(t)\exp(-\sin(t))\,.$$

Im homogenen Fall $b \equiv 0$ können wir diese Gleichung mithilfe von Satz 2.5 (i) durch Integration lösen und erhalten mit $z = \exp(-\sin(t))$ und der Relation $z = v'$ als weitere Lösung der homogenen Gleichung (mit Anfangswerten x_0) die Funktion

$$u(t) = u_{hom}(t)v(t) = x_0\exp(\sin(t))\int_{t_0}^{t}\exp(-\sin(s))\,ds\,.$$

Im inhomogenen Fall ergibt sich dagegen mit Satz 2.5 (ii) zunächst für z die Darstellungsformel

$$z(t) = \exp(-\sin(t))\Big[z_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)\,ds\Big],$$

(mit Anfangswerten z_0 bei t_0), und eine Lösung des inhomogenen Problems findet man mit $z' = v$ dann durch eine weitere Integration und den Ansatz $u = u_{hom}v$.

(ii) *Als nächstes betrachten wir die gewöhnliche Differentialgleichung*

$$u'' - u = 3t\exp(2t)\,.$$

Da es sich hier um eine Gleichung mit konstanten Koeffizienten handelt, lässt sich eine Lösung der homogenen Gleichung leicht mithilfe des charakteristischen Polynoms bestimmen, nämlich $u_{hom}(t) = \exp(t)$ oder $u_{hom} = \exp(-t)$ (die beide den Vorteil haben, im Gegensatz zu etwa $\sinh(t)$, dass es sich um nullstellenfreie Lösungen der homogenen Gleichung handelt). Mit der Wahl

$$u_{hom}(t) = \exp(t)$$

ergibt sich als Differentialgleichung für z

$$z' + 2z = 3t\exp(t)\,,$$

und damit folgt mit Satz 2.5 (ii) sowie der Identität $\frac{d}{ds}((s-\frac{1}{3})\exp(3s)) = 3s\exp(3s)$ zunächst

$$z(t) = \exp(-2t)\Big[z_0 + \int_{t_0}^{t} 3s\exp(3s)\,ds\Big] = \exp(-2t)\tilde{z}_0 + \Big(t - \frac{1}{3}\Big)\exp(t)\,,$$

und nach Integration

$$v(t) = c_0\exp(-2t) + c_1 + \Big(t - \frac{4}{3}\Big)\exp(t)$$

mit Konstanten $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. Als allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung finden wir wegen des Ansatzes $u = vu_{hom}$ damit

$$u(t) = c_0 \exp(-t) + c_1 \exp(t) + \left(t - \frac{4}{3}\right) \exp(2t)$$

mit freien Konstanten $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$, mit denen man vorgegebene Anfangswerte erfüllen kann. Für die Herleitung der allgemeinen Lösung für dieses Beispiel haben wir bereits eine alternative Herangehensweise über einen Exponentialansatz (der aufgrund der speziellen Form der Inhomogenität möglich ist) auf Übungsblatt 2 kennengelernt.

2.4 Exakte Differentialgleichungen

Wir betrachten nun spezielle (implizite) gewöhnliche Differentialgleichungen der Form

$$g(t, u) + h(t, u)u' = 0 \tag{2.4}$$

mit Funktionen g, h. Wir arbeiten nun also mit Differentialgleichungen, die linear in der höchsten (ersten) Ableitung sind, aber deren Vorfaktor noch von der unabhängigen Variable sowie der Lösung selbst abhängen kann.

Definition 2.12. *Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und seien $g, h \colon D \to \mathbb{R}$ gegeben. Die gewöhnliche Differentialgleichung* (2.4) *heißt* exakt, *falls es eine differenzierbare Funktion $\Phi \colon D \to \mathbb{R}$ gibt (die sogenannte* Stammfunktion*), so dass für ihre partiellen Ableitungen gelten:*

$$\frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial t} = g(t, x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial x} = h(t, x) \qquad \text{für } (t, x) \in D\,.$$

Bemerkungen 2.13.

(i) *Der Name "exakt" bezieht sich darauf, dass die Differentialform $g(t, u)\,dt + h(t, u)\,du$ vom Grad 1 exakt ist, was genau bedeutet, dass eine 0-Form existiert, deren äußere Ableitung diese 1-Form ergibt.*

(ii) *Ist D ein zusammenhängendes Gebiet, so sind Stammfunktionen bis auf additive Konstanten eindeutig festgelegt. Diese Konstante hat jedoch keine Relevanz für g und h.*

Satz 2.14 (über exakte Differentialgleichungen)**.** *Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und seien stetige Funkionen $g, h \colon D \to \mathbb{R}$ gegeben, so dass die gewöhnliche Differentialgleichung* (2.4) *exakt ist. Eine differenzierbare Funktion $u \colon I \to \mathbb{R}$ mit $(t, u(t)) \in D$ für alle $t \in I$ (und $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall) ist genau dann eine Lösung der Differentialgleichung* (2.4)*, falls für die Stammfunktion Φ von g, h*

$$\Phi(t, u(t)) = C \qquad \text{für alle } t \in I$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$ gilt.

Beweis. Da Φ eine Stammfunktion von g, h ist, gilt mit der Kettenregel für jede differenzierbare Funktion $u \colon I \to \mathbb{R}$ mit $(t, u(t)) \in D$ für alle $t \in I$ auch

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi(t, u(t)) &= \frac{\partial \Phi(t, u(t))}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(t, u(t))}{\partial x} u'(t) \\ &= g(t, u(t)) + h(t, u(t))u'(t) \end{aligned}$$

für $t \in I$. Ist u also eine Lösung der Differentialgleichung (2.4), so verschwindet die Ableitung von $t \mapsto \Phi(t, u(t))$ auf ganz I, daher gilt nach dem Konstanzsatz $\Phi(t, u(t)) = C$ auf I für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Ist umgekehrt die Funktion $\Phi(t, u(t))$ auf I konstant, so verschwindet ihre Ableitung auf I, also ist die linke Seite in der oberen Rechnung 0, und damit wird die Differentialgleichung (2.4) durch u gelöst. $\square$

Bemerkungen 2.15.

(i) *Möchte man ein Anfangswertproblem mit Startwert $u(t_0) = x_0$ lösen, so bestimmt man die Konstante C der Niveaumenge von Φ, in der $t \mapsto (t, u(t))$ seine Werte annimmt, als $\Phi(t_0, x_0)$.*

(ii) *Der Satz liefert zwar keine explizite Lösungsformel, sondern nur eine implizite Beschreibung, aber manchmal ist es möglich, die Stammfunktion nach u aufzulösen und so eine explizite Darstellung der Lösung zu erhalten. Zu beachten ist hier, dass die Lösung häufig nicht auf der ganzen C-Niveaumenge existiert, sondern nur auf einer Teilmenge.*

Die wesentliche Voraussetzung, die es für die Anwendung von Satz 2.14 zu verifizieren gilt, ist also die Exaktheit der gewöhnlichen Differentialgleichung. Sind die Funktionen g und h stetig differenzierbar, so ist nach dem Satz von Schwarz die Gültigkeit von

$$\Big(\frac{\partial^2 \Phi(t,x)}{\partial x \partial t} = \Big) \quad \frac{\partial g(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial h(t,x)}{\partial t} \quad \Big(= \frac{\partial^2 \Phi(t,x)}{\partial x \partial t}\Big)$$

auf D eine notwendige Bedingung. Ist D sternförmig oder einfach zusammenhängend, ist dies nach dem Lemma von Poincaré auch eine hinreichende Bedingung für Exaktheit. Im Spezialfall eines Rechtecks lässt sich die Stammfunktion sogar konkret durch Integration bestimmen.

Lemma 2.16. *Seien $a_0 < a_1$, $b_0 < b_1$, $Q := (a_0, a_1) \times (b_0, b_1)$ ein Quader und $g, h \colon Q \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit den Eigenschaften, dass*

$$\begin{aligned} &x \mapsto g(t,x) \text{ stetig differenzierbar ist für alle } t \in (a_0, a_1)\,, \\ &t \mapsto h(t,x) \text{ stetig differenzierbar ist für alle } x \in (b_0, b_1)\,, \end{aligned}$$

und die partiellen Ableitungen die Gleichung

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial h(t,x)}{\partial t} \qquad \text{in } Q \tag{2.5}$$

erfüllen. Dann ist die zugehörige gewöhnliche Differentialgleichung (2.4) *exakt mit Stammfunktion*

$$\begin{aligned} \Phi_0(t,x) &:= \int_{t_0}^{t} g(s,x)\,ds + \int_{x_0}^{x} h(t_0,y)\,dy \\ &= \int_{t_0}^{t} g(s,x_0)\,ds + \int_{x_0}^{x} h(t,y)\,dy \end{aligned}$$

für alle $(t_0, x_0), (t, x) \in Q$.

Beweis. Für beide Darstellungen gilt offensichtlich $\Phi_0(t_0, x_0) = 0$, und wir brauchen daher nur noch zu zeigen, dass die partiellen Ableitungen übereinstimmen, damit beide Definitionen von $\Phi_0(t,x)$ auf die gleiche Funktion führen, und dass dabei zusätzlich die beiden Identitäten

$$\frac{\partial \Phi_0(t,x)}{\partial t} = g(t,x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi_0(t,x)}{\partial x} = h(t,x)$$

gelten, damit es sich tatsächlich um eine Stammfunktion für g, h handelt. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, der Differentiation parameterabhängiger Integrale sowie der Beziehung (2.5) berechnen wir für die erste Darstellung von $\Phi_0(t,x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_0(t,x)}{\partial t} &= g(t,x)\,, \\ \frac{\partial \Phi_0(t,x)}{\partial x} &= \int_{t_0}^{t} \frac{\partial g(s,x)}{\partial x}\,ds + h(t_0,x) \\ &= \int_{t_0}^{t} \frac{\partial h(s,x)}{\partial s}\,ds + h(t_0,x) = h(t,x)\,, \end{aligned}$$

und die gleichen Ergebnisse erhält man in analoger Weise auch für die zweite Darstellung. □

Bemerkung 2.17. *Zur praktischen Berechnung der Stammfunktion kann man auch im ersten Schritt eines der beiden Integrale*

$$\Phi(t,x) = \int_{t_0}^{t} g(s,x)\,ds + A(x)$$
$$\Phi(t,x) = B(t) + \int_{x_0}^{x} h(t,y)\,dy$$

bestimmen (am besten das, das einfacher zu berechnen ist), wobei $A(x)$ bzw. $B(t)$ für die von x bzw. t abhängigen Integrationskonstanten stehen, die im zweiten Schritt noch geeignet gewählt werden müssen. Mit diesen Ansätzen für Φ ist jeweils schon eines der beiden Kritierien der Eigenschaft der Stammfunktion sichergestellt, nämlich $\partial\Phi(t,x)/\partial t = g(t,x)$ im ersten Fall und $\partial\Phi(t,x)/\partial x = h(t,x)$ im zweiten Fall. Das zweite Kriterium wird durch die geschickte Wahl von $A(x)$ bzw. $B(t)$ garantiert, nämlich so dass die folgenden Gleichungen

$$A'(x) = h(t,x) - \frac{\partial}{\partial x}\Big[\int_{t_0}^{t} g(s,x)\,ds\Big] \qquad \Big(\Rightarrow \frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial x} = h(t,x)\Big)$$
$$B'(t) = g(t,x) - \frac{\partial}{\partial t}\Big[\int_{x_0}^{x} h(t,y)\,dy\Big] \qquad \Big(\Rightarrow \frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial t} = g(t,x)\Big)$$

gelten, aus denen man nun die unbekannten Funktionen $A(x)$ bzw. $B(t)$ durch eine einfache Integration erhält.

Beispiele 2.18.

(i) *Gleichungen der Form*

$$b(t) - f(u)u' = 0$$

mit separierten Variablen sind exakt mit Stammfunktion $\Phi(t,x) = -F(x) + B(t)$ (mit F und B wie zuvor Stammfunktionen zu f bzw. b).

(ii) *Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung*

$$u + t^2 + tu' = 0\,,$$

also eine Gleichung der Form (2.4) mit $g(t,x) = x + t^2$ und $h(t,u) = t$. Hier gilt $\frac{\partial}{\partial x}g(t,x) = 1 = \frac{\partial}{\partial t}h(t,x)$, und wegen Lemma 2.16 ist die Gleichung auf ganz $\mathbb{R}^2$ exakt mit Stammfunktion

$$\Phi(t,x) = xt + \frac{1}{3}t^3\,.$$

Für einen gegebenen Anfangswert $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}^2$ müssen wir für die Bestimmung der Lösungen des zugehörigen Anfangswertproblems daher die Niveaumengen

$$N(t_0,x_0) = \big\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \colon \Phi(t,x) = \Phi(t_0,x_0)\big\}$$

betrachten. Hier unterscheiden wir zwei Fälle:

- *Falls $\Phi(t_0,x_0) \neq 0$ gilt, so ist kein Punkt mit $t = 0$ in der Niveaumenge $N(t_0,x_0)$, und diese besteht aus den zwei Kurven*

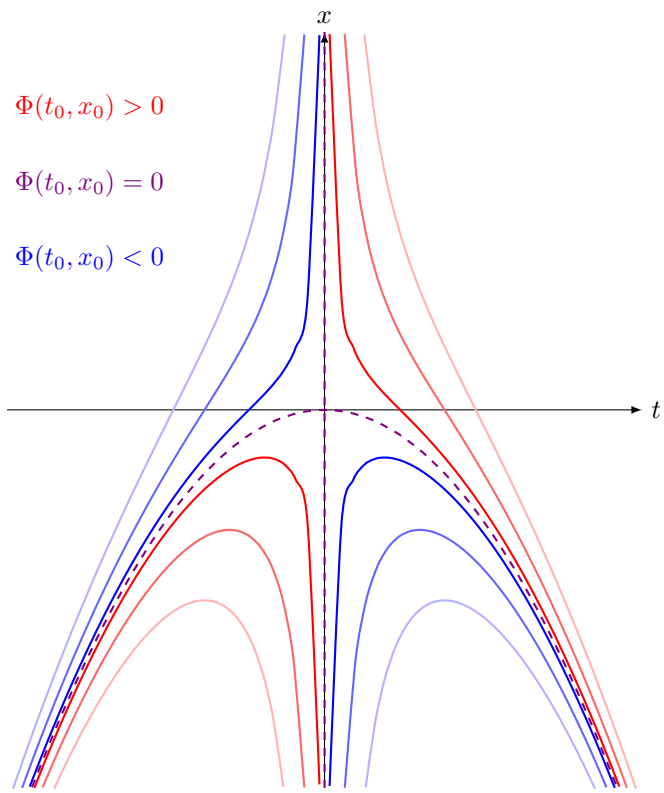
$$\big\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \colon t \in \mathbb{R}^- \text{ und } x = \tfrac{1}{t}\big(\tfrac{1}{3}t_0^3 - \tfrac{1}{3}t^3 + t_0x_0\big)\big\}\,,$$
$$\big\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \colon t \in \mathbb{R}^+ \text{ und } x = \tfrac{1}{t}\big(\tfrac{1}{3}t_0^3 - \tfrac{1}{3}t^3 + t_0x_0\big)\big\}\,.$$

  Je nachdem, ob t_0 positiv oder negativ ist, ist die Lösung genau durch eine der beiden Kurven (sogar explizit) gegeben.

- *Falls dagegen* $\Phi(t_0, x_0) = 0$ *gilt, so besteht* $N(t_0, x_0)$ *aus (den sich im Ursprung schneidenden) Kurven*

$$\left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \colon t = 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}\right\},$$
$$\left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \colon t \in \mathbb{R} \text{ und } x = -\tfrac{1}{3}t^2\right\}.$$

Lösungen existieren hier nur für $t_0 \neq 0$ *oder* $t_0 = x_0 = 0$*, und die Lösung ist dann durch die zweite Kurve explizit gegeben.*



In einigen Fällen ist die gewöhnliche Differentialgleichung von der Form (2.4) zwar nicht exakt, jedoch gibt viele äquivalente Gleichungen (man kann insbesondere die Gleichung mit einem überall nicht-verschwindenden Faktor multiplizieren), im Sinne, dass sie alle die gleichen Lösungen besitzen. Ist eine dieser äquivalenten Gleichungen exakt, so kann man diese für eine implizite Beschreibung der Lösungen nutzen.

Definition 2.19. *Sei* $D \subset \mathbb{R}^2$ *offen und seien stetige Funkionen* $g, h \colon D \to \mathbb{R}$ *gegeben. Eine stetige Funktion* $m \colon D \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *heißt* integrierender Faktor *oder* Eulerscher Multiplikator *für die gewöhnliche Differentialgleichung* (2.4)*, falls die Gleichung*

$$m(t,u)g(t,u) + m(t,u)h(t,u)u' = 0$$

auf D *exakt ist.*

Bemerkung 2.20. *Für differenzierbare Funktionen* g*,* h *und* m *entspricht die notwendige (und auf Quadern auch hinreichende) Bedingung* (2.5) *für Exaktheit nun*

$$\frac{\partial m(t,x)}{\partial x} g(t,x) + m(t,x)\frac{\partial g(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial m(t,x)}{\partial t} h(t,x) + m(t,x)\frac{\partial h(t,x)}{\partial t}.$$

Da g *und* h *in diesem Fall bekannt sind, ist das eine* partielle *Differentialgleichung erster Ordnung für die unbekannte Funktion* m *(und damit prinzipiell ähnlich schwer zu lösen wie die ursprüngliche*

gewöhnliche Differentialgleichung). Aber in manchen Fällen kann man anhand der Form der Gleichung den integrierenden Faktor tatsächlich erraten oder mit einem speziellen Ansatz finden, bei dem m tatsächlich nur von einer *Variable wie t, x, tx oder $t+x$ abhängt bzw. von spezieller Struktur ist (wie etwa $m(t,x) = m_1(t)m_2(x)$ für zwei Funktionen m_1, m_2).*

Beispiele 2.21.

(i) *Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen von der Form*

$$u' + a(t)u = b(t)$$

mit stetigen Funktionen a, b (wie in Satz 2.5) sind im Allgemeinen nicht exakt, denn es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(a(t)x - b(t)\big) = a(t) \overset{i.A.}{\neq} 0 = \frac{\partial}{\partial t}1\,,$$

jedoch können sie mit dem integrierenden Faktor

$$m(t) = \exp(A(t)) \qquad \text{mit } A'(t) = a(t)$$

exakt gemacht werden, und diese äquivalente Differentialgleichung besitzt dann die Stammfunktion (vgl. die Formel aus Lemma 2.16)

$$\begin{aligned}\Phi_0(t,x) &= \int_{t_0}^{t} (a(s)x_0 - b(s))\exp(A(s))\,ds + \int_{x_0}^{x} \exp(A(t))\,dy \\ &= \exp(A(t))x - \exp(A(t_0))x_0 - \int_{t_0}^{t} b(s)\exp(A(s))\,ds\,.\end{aligned}$$

Zu einem vorgegebenen Niveauwert kann man leicht nach x auflösen und so, unter Beachtung der Anfangsbedingung, auf die Darstellungsformel für Lösungen aus Satz 2.5 zurückschließen (am einfachsten, indem man A als die Stammfunktion mit $A(t_0) = 0$ wählt).

(ii) *Die gewöhnliche Differentialgleichung*

$$tu + u^2u' = 0$$

ist wegen $\frac{\partial}{\partial x}(tx) = t \neq 0 = \frac{\partial}{\partial t}x^2$ nicht exakt, und als Gleichung für den integrierenden Faktor ergibt sich

$$\frac{\partial m(t,x)}{\partial x}tx + m(t,x)t = \frac{\partial m(t,x)}{\partial t}x^2\,.$$

Mit dem Ansatz, dass m nur von der x-Variable abhängt, kommt man auf $m(t,x) = x^{-1}$ (für $x \neq 0$), und wir erhalten so die modifizierte Differentialgleichung

$$t + uu' = 0\,,$$

die die Stammfunktion $\Phi(t,x) = \frac{1}{2}(t^2 + x^2)$ besitzt. Für Lösungen muss gemäß Satz 2.14 dann

$$t^2 + (u(t))^2 = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

gelten. Je nach Anfangsbedingung erhalten wir dann die Funktionen $u(t) = \pm\sqrt{c - t^2}$ für Zeiten $|t| < \sqrt{c}$ als Lösung (und sie können darüber hinaus aber nicht auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden). *Außerdem gibt es auch die triviale Lösung $u \equiv 0$.*

Zusammenfassend haben wir also für das Lösen einer gewöhnlichen Differentialgleichung der Form (2.4) mit dem Ansatz von exakten Gleichungen und integrierenden Faktoren die folgende Strategie:

(1) *Prüfung (oder Herstellung der) Exaktheit der Gleichung.* Wenn wir die Regularität der involvierten Funktionen voraussetzen, so ist ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für Exaktheit in einfach zusammenhängenden Gebieten die Identität

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial h(t,x)}{\partial t}\,.$$

(a) Ist dies der Fall, so haben wir bereits eine exakte Differentialgleichung und können zum nächsten Schritt gehen.

(b) Ist dies nicht der Fall, so suchen wir nach einem integrierenden Faktor m, so dass die modifizierte Gleichung

$$m(t,u)g(t,u) + m(t,u)h(t,u)u' = 0$$

exakt ist und wenden die nachfolgende Schritte auf diese (äquivalente) Gleichung an.

(2) *Bestimmung der Stammfunktion.* Wir können $\Phi_0(t,x)$ auf rechteckigen Gebieten über eine der Formeln

$$\Phi_0(t,x) = \int_{t_0}^{t} g(s,x)\,ds + \int_{x_0}^{x} h(t_0,y)\,dy = \int_{t_0}^{t} g(s,x_0)\,ds + \int_{x_0}^{x} h(t,y)\,dy$$

(oder den Ansatz aus Bemerkung 2.17) berechnen.

(3) *Implizite (und ggf. explizite) Beschreibung der Lösung.* Die Lösungen der Differentialgleichungen nehmen ihre Werte laut Satz 2.14 in den Niveaumengen der Stammfunktion an und sind somit implizit beschrieben. Für Anfangswertprobleme mit $u(t_0) = x_0$ bestimmt man die richtige Niveaumenge über $\Phi(t_0,x_0)$ und muss dann noch untersuchen, auf welchen Teilen der Niveaumenge die Lösung tatsächlich lebt (die Niveaumengen können etwa nicht zusammenhängend sein oder nicht das Bild einer Funktion sein). Gegebenenfalls ist eine Auflösung der impliziten Gleichung möglich und man erhält so eine explizite Darstellung für die Lösung.

Diese Strategie lässt sich insbesondere auch anwenden, um ein Lösungsverfahren für die **Bernoullischen Differentialgleichungen** zu entwickeln. Es handelt sich dabei um Gleichungen der Form

$$u' = a(t)u + b(t)u^\alpha$$

mit $a, b\colon I \to \mathbb{R}$ stetigen Funktionen auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$, einen Exponenten $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (der Fall $\alpha = 1$ beschreibt eine lineare Gleichung, die wir bereits lösen können), und betrachtet werden sollen nur positive Lösungen $u > 0$ (damit der Term u^α wohldefiniert ist).

Wir stellen zunächst fest, dass die Exaktheit der Gleichung a priori nicht erfüllt ist, da wir in diesem Fall mit der Gleichung (2.4) für Funktionen

$$g(t,x) = -a(t)x - b(t)x^\alpha \qquad \text{und} \qquad h(t,x) = 1$$

arbeiten und damit

$$\frac{\partial}{\partial x} g(t,x) = -a(t) - b(t)\alpha x^{\alpha-1} \overset{\text{i.A.}}{\neq} 0 = \frac{\partial}{\partial t} h(t,x)\,,$$

gilt. Als integrierenden Faktor erhält man mittels einen Separationsansatzes, bei dem man nach einer Funktion $m(t,x)$ der speziellen Form $m(t,x) = m_1(t)m_2(x)$ mit regulären Funktionen m_1, m_2 sucht:

$$m(t,x) = -(\alpha-1)x^{-\alpha}\exp\big((\alpha-1)A(t)\big) \qquad \text{mit } A'(t) = a(t)\,,$$

denn für die modifizierte Gleichung mit

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(t,x) &\coloneqq g(t,x)m(t,x) = (\alpha-1)\big[a(t)x^{1-\alpha} + b(t)\big]\exp\big((\alpha-1)A(t)\big)\\
\tilde{h}(t,x) &\coloneqq h(t,x)m(t,x) = -(\alpha-1)x^{-\alpha}\exp\big((\alpha-1)A(t)\big)
\end{aligned}$$

ist die notwendige Bedingung für Exaktheit erfüllt:

$$\frac{\partial \tilde{g}(t,x)}{\partial x} = -(\alpha-1)^2 a(t) x^{-\alpha} \exp\big((\alpha-1)A(t)\big) = \frac{\partial \tilde{h}(t,x)}{\partial t}\,.$$

Im nächsten Schritt bestimmen wir die Stammfunktion mittels Integration (in der x-Variable könnte beim Ursprung eine Singularität vorliegen, aber da wir nur positive Lösungen untersuchen, ist das unproblematisch):

$$\begin{aligned}
\Phi_0(t,x) &= \int_{t_0}^{t} \tilde{g}(s,x)\,ds + \int_{x_0}^{x} \tilde{h}(t_0,y)\,dy \\
&= x^{1-\alpha} \int_{t_0}^{t} (\alpha-1)a(s)\exp\big((\alpha-1)A(s)\big)\,ds + (\alpha-1)\int_{t_0}^{t} b(s)\exp\big((\alpha-1)A(s)\big)\,ds \\
&\quad + \exp\big((\alpha-1)A(t_0)\big)\int_{x_0}^{x} (1-\alpha)y^{-\alpha}\,dy \\
&= x^{1-\alpha}\big[\exp\big((\alpha-1)A(t)\big) - \exp\big((\alpha-1)A(t_0)\big)\big] + (\alpha-1)\int_{t_0}^{t} b(s)\exp\big((\alpha-1)A(s)\big)\,ds \\
&\quad + \exp\big((\alpha-1)A(t_0)\big)\big[x^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}\big] \\
&= x^{1-\alpha}\exp\big((\alpha-1)A(t)\big) - x_0^{1-\alpha}\exp\big((\alpha-1)A(t_0)\big) + (\alpha-1)\int_{t_0}^{t} b(s)\exp\big((\alpha-1)A(s)\big)\,ds\,.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich nun einfach nach x auflösen, und man erhält so eine explizite Formel für die Lösung (wenn man das letzte Integral für spezielle Wahlen von b auch tatsächlich berechnen kann).

2.5 Potenzreihenansatz

Beim Potenzreihenansatz (auch Methode von Frobenius genannt) geht man davon aus, dass die Lösung einer gegebenen Differentialgleichung auf einem Intervall (um den Entwicklungspunkt t_0) als Potenzreihe dargestellt werden kann, sich also als

$$u(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (t-t_0)^j$$

mit geeigneten Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$ schreiben lässt. Das Ziel ist es dann, die Koeffizienten der Entwicklung zu bestimmen und ggf. eine einfachere Darstellung der Lösung zu finden. Das allgemeine Vorgehen bei diesem Verfahren ist:

(1) Berechnung der in der Differentialgleichung auftretenden Ableitungen von u (bzw. Funktionen davon) durch formale, gliedweise Differentiation.

(2) Einsetzen der formalen Potenzreihen für u und seine Ableitungen in die Differentialgleichung und Bestimmung der Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$ durch Koeffizientenvergleich bei den verschiedenen Potenzen in t. Manchmal macht eine Rekursionsformel eine einfache, explizite Berechnung möglich.

(3) A posteriori muss dieses Verfahren noch gerechtfertigt werden, indem die Konvergenz und der Konvergenzradius der Reihe untersucht wird.

Zu beachten ist hier, dass aufgrund des speziellen Ansatzes lediglich alle Lösungen gefunden werden, die sich als Potenzreihe entwickeln lassen, aber es könnte prinzipiell noch weitere Lösungen geben (die eine solche Entwicklung nicht zulassen, aber trotzdem noch regulär genug sind, um eine Lösung zu sein). Dieses Phänomen kann man für bestimmte Klassen von Gleichungen durch Eindeutigkeitsaussagen ausschließen, die wir im nächsten Kapitel kennenlernen werden.

Beispiele 2.22.

(i) *Die gewöhnliche Differentialgleichung*

$$u'' = -u$$

haben wir in Beispiel 1.8 (v) *bereits behandelt und leiten diese Lösungsformel hier mithilfe des Potenzreihenansatzes und Entwicklungspunkt* $t_0 = 0$ *her. Die formalen Reihendarstellungen für* u, u' *und* u'' *sind*

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j \,, \\ u'(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} j a_j t^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) a_{j+1} t^j \,, \\ u''(t) &= \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) a_j t^{j-2} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1) a_{j+2} t^j \,. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung und Koeffizientenvergleich ergibt sich für die Lösungseigenschaft von u *als notwendiges Kritierium die Gültigkeit von*

$$(j+2)(j+1)a_{j+2} = -a_j$$

für alle $j \in \mathbb{N}_0$. *Damit sind* a_0 *und* a_1 *freie Parameter, und für die restlichen Koeffizienten gelten die Formeln*

$$a_{2k} = a_0 \frac{(-1)^k}{(2k)!} \qquad \text{und} \qquad a_{2k+1} = a_1 \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

für $k \in \mathbb{N}$. *Mit der Reihendarstellung von Cosinus und Sinus folgt*

$$u(t) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1} = a_0 \cos(t) + a_1 \sin(t)$$

(*und da diese Reihen unendlichen Konvergenzradius haben, war das Verfahren auch gerechtfertigt*).

(ii) *Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung*

$$u' = t^2 + u^2 \,,$$

die ein spezieller Fall einer **Riccati-Gleichung** *ist* (*die allgemein von der Form* $u' = a(t)u^2 + b(t)u + c(t)$ *ist*). *Die formalen Reihendarstellungen für* u, u' *und* u^2 *sind*

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j \,, \\ u'(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) a_{j+1} t^j \,, \\ u^2(t) &= \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \Big)^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{\ell=0}^{j} a_\ell a_{j-\ell} \Big) t^j \,. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung führt nach Koeffizientenvergleich auf die Beziehungen

$$3a_3 = 1 + \sum_{\ell=0}^{2} a_\ell a_{2-\ell} \quad \text{und} \quad (j+1)a_{j+1} = \sum_{\ell=0}^{j} a_\ell a_{j-\ell} \quad \text{für } j \in \mathbb{N}_0 \setminus \{2\} \,.$$

In Abhängigkeit von a_0 (also dem Anfangswert $u(0)$) kann man nun die Koeffizienten angeben als

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0^2 \\ a_2 &= \frac{1}{2}(a_0 a_1 + a_1 a_0) = a_0 a_1 = a_0^3 \\ a_3 &= \frac{1}{3}(1 + a_0 a_2 + a_1^2 + a_2 a_0) = \frac{1}{3}(1 + 3a_0^4) \qquad \textit{etc.} \end{aligned}$$

und erwartet aufgrund der Form der Koeffizienten die Konvergenz der Potenzreihe für u (und damit die Rechtfertigung des Potenzreihenansatzes) nur für Zeiten t nahe bei der Startzeit 0.

(iii) *Schließlich wollen wir noch das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} t^3 u' &= 2u \\ u(0) &= 0 \end{cases}$$

lösen. Mit dem Potenzreihenansatz führt die Differentialgleichung auf die Beziehung

$$\sum_{j=3}^{\infty} (j-2) a_{j-2} t^j = 2 \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j \,.$$

Da die Anfangsbedingung und der Koeffizientenvergleich bei t^0 und t^1 schon $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ implizieren, erhalten wir wegen der Rekursionsformel $(j-2)a_{j-2} = 2a_j$ für $j \geq 3$ nur die triviale Funktion $u \equiv 0$ als Lösung des Anfangswertproblems. Mit Separation der Variablen (Vorsicht mit $u(0) = 0$) folgt jedoch, dass alle Funktionen der Form

$$u(t) = c \exp(-t^{-2}) \qquad \textit{mit stetiger Fortsetzung durch } u(0) = 0$$

mit beliebiger Konstante $c \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem lösen. Diese Lösung kann durch den Potenzreihenansatz nicht gefunden werden, da die Funktion $t \mapsto \exp(-t^{-2})$ (wieder stetig in 0 fortgesetzt) bei $t = 0$ nur von der Klasse C^∞, aber nicht analytisch ist, und sie sich somit nicht in einer Potenzreihe entwickeln lässt.

2.6 Variablentransformationen

Durch die Einführung neuer Variablen kann man manche gewöhnlichen Differentialgleichungen in eine andere Gleichung überführen, die man explizit, beispielsweise mit den bisher vorgestellten Verfahren, lösen kann. Im Wesentlichen kann man hier sowohl die unabhängige als auch die abhängige Variable transformieren, und daher betrachtet man typischerweise eine (auf $T(D)$) bijektive und hinreichend reguläre Abbildung

$$T \colon D \subset \mathbb{R}^{1+N} \to \mathbb{R}^{1+N}\,, \qquad (t,u) \mapsto (T_1(t,u), \widetilde{T}(t,u)) = (s,v)\,.$$

Mithilfe dieser Transformation sowie der ursprünglichen Gleichungen für u als Funktion von t kann man dann eine Differentialgleichung für die neue Funktion v als Funktion von s aufstellen (mit einer Strukturfunktion auf dem transformierten Definitionsgebiet $T(D)$). Kann man diese lösen, so erhält man die ursprünglich gesuchte Lösung u durch Rücktransformation mithilfe der Umkehrabbildung T^{-1}. Dieses Vorgehen werden wir nun im Detail für die zwei Spezialfälle erklären, dass nur die unabhängige oder nur die abhängige Variable transformiert wird.

Transformation der unabhängigen Variablen. Transformieren wir nur die unabhängige Variable, so betrachten wir den Spezialfall einer Transformation des Typs

$$s = T_1(t) \quad \text{und} \quad v = u$$

mit einer bijektiven Abbildung T_1 (von einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ nach $T_1(I)$), deren Regularität mindestens so gut wie die Ordnung der Gleichung sein muss (also von der Klasse C^k für Gleichungen der Ordnung k). Wir arbeiten dann mit der Funktion

$$v(s) = u(T_1^{-1}(s)) \quad \text{und der Rücktransformation } u(t) = v(T_1(t))\,.$$

Um die Differentialgleichung für v als Funktion von $s = T_1(t)$ aufzustellen, können wir in einem ersten Schritt etwa die Rücktransformation differenzieren

$$\begin{aligned} u'(t) &= v'(T_1(t))T_1'(t) \\ u''(t) &= v''(T_1(t))(T_1'(t))^2 + v'(T_1(t))T_1''(t) \\ u'''(t) &= v'''(T_1(t))(T_1'(t))^3 + 3v''(T_1(t))T_1'(t)T_1''(t) + v'(T_1(t))T_1'''(t) \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt setzen wir diese Ausdrücke für die Ableitungen von u in die Differentialgleichung ein und schreiben alle Ausdrücke in t mittels $t = T_1^{-1}(s)$ um. Dies ist für Gleichungen höherer Ordnung meist das einfachste Vorgehen. Alternativ kann man, insbesondere für Gleichungen erster Ordnung, auch v direkt differenzieren

$$v'(s) = u'(T_1^{-1}(s))(T_1^{-1})'(s)$$

und den Term $u'(T_1^{-1}(s))$ mithilfe der Differentialgleichung als Funktion in v und s ausdrücken.

Beispiel 2.23. *Die* **Eulersche Gleichung**

$$t^k u^{(k)} + a_{k-1}t^{k-1}u^{(k-1)} + \ldots + a_1 t u' + a_0 u = 0 \quad \textit{auf } \mathbb{R}^+$$

mit Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ ist eine spezielle lineare Differentialgleichung der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ mit nicht-konstanten Koeffizienten (und daher mit den bisher zur Verfügung stehenden Methoden nicht lösbar). Die Tatsache, dass die j-te Ableitung jeweils mit dem Faktor t^j, $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$, multipliziert wird, ist der Schlüssel zu einer nützlichen Transformation. Mit der Wahl

$$s = T_1(t) = \log t \quad \textit{oder äquivalent} \quad t = T_1^{-1}(s) = \exp(s)$$

(T_1 ist also eine Bijektion von $\mathbb{R}^+$ nach $\mathbb{R}$), also mit

$$u(t) = v(\log t) \quad \textit{und der Rücktransformation } v(s) = u(\exp(s))\,,$$

sehen wir

$$\begin{aligned} u'(t) &= v'(\log t)t^{-1} \\ u''(t) &= v''(\log t)t^{-2} - v'(\log t)t^{-2} \end{aligned}$$

und allgemeiner

$$u^{(j)}(t) = v^{(j)}(\log t)t^{-j} + \sum_{\ell=1}^{j-1} c_{j,\ell} v^{(\ell)}(\log t)t^{-j} \qquad \textit{für } j \in \mathbb{N}$$

mit konstanten Zahlen $c_{j,\ell} \in \mathbb{R}$ für $j \in \mathbb{N}$ und $\ell \in \{1, \ldots, j-1\}$ (die genaue Form könnte man auch angeben, spielt hier aber weiter keine Rolle). Beim Einsetzen in die Eulersche Gleichung heben sich damit alle t-Potenzen weg und wir erhalten für v eine Gleichung der Form

$$b_k v^{(k)} + b_{k-1}v^{(k-1)} + \ldots + b_1 v' + b_0 v = 0 \quad \textit{auf } \mathbb{R}$$

mit Konstanten $b_0, b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$ (die sich aus den a_j und $c_{j,\ell}$ berechnen lassen). Es handelt sich bei der Gleichung für v also um eine lineare Differentialgleichung der Ordnung k mit konstanten *Koeffizienten. Diese können wir mithilfe von Satz 2.8 lösen und über $u(t) = v(\log t)$ dann auch eine Lösungsformel für die ursprüngliche Eulersche Gleichung gewinnen.*

Transformation der abhängigen Variablen. Transformieren wir nur die unabhängige Variable, so betrachten wir den Spezialfall einer Transformation des Typs

$$s = t \quad \text{und} \quad v = \widetilde{T}(t,u) = \widetilde{T}_t(u)$$

mit einer Familie $(\widetilde{T}_t)_t$ von Bijektionen (auf Teilmengen des $\mathbb{R}^N$), die wieder mindestens so oft differenzierbar sein muss wie die Ordnung der Gleichung. Wir arbeiten dann mit

$$v(t) = \widetilde{T}_t(u(t)) \quad \text{und der Rücktransformation } u(t) = (\widetilde{T}_t)^{-1}(v(t))\,.$$

Ähnlich wie bei der Transformation der unabhängigen Variable berechnet man mit der Kettenregel Ableitung wie

$$v'(t) = (\widetilde{T}_t)'(u(t))u'(t) \quad \text{bzw.} \quad u'(t) = (\widetilde{T}_t^{-1})'(v(t))v'(t)$$

und bestimmt so die Differentialgleichung für v.

Beispiele 2.24. *Typischerweise sieht man der zu transformierenden Gleichung bereits eine Struktur an, die ein Indiz für eine nützliche Transformation sein kann.*

(i) *Für die Gleichung $u' = (t+u)^2$, vgl. Beispiel* 1.8 (iv)*, transformiert man mittels*

$$v = \widetilde{T}_t(u) := t + u \quad \textit{oder äquivalent} \quad u = (\widetilde{T}_t)^{-1}(v) = v - t\,.$$

Differenziert man $v(t) = t+u(t)$, so erhält man mithilfe der ursprünglichen Gleichung die folgende Differentialgleichung für v

$$v'(t) = 1 + u'(t) = 1 + (t + u(t))^2 = 1 + (v(t))^2\,,$$

also eine autonome Gleichung, die wir bereits mit Separation der Variablen in Beispiel 2.4 (ii) *gelöst haben. Als Lösung ergibt sich $v(t) = \tan(t+c)$ mit einer beliebigen Konstante $c \in \mathbb{R}$, und nach Rücktransformation erhalten wir für die ursprüngliche Gleichung als Lösung*

$$u(t) = v(t) - t = \tan(t+c) - t\,.$$

(ii) *Für eine Gleichung der Form $u' = h(u/t)$ (auf $\mathbb{R}^+$ oder $\mathbb{R}^-$) mit stetiger Funktion h wählt man als Transformation*

$$v = \widetilde{T}_t(u) := \frac{u}{t} \quad \textit{oder äquivalent} \quad u = (\widetilde{T}_t)^{-1}(v) = tv\,.$$

Differenziert man $v(t) = u(t)/t$, so ergibt sich

$$v'(t) = \frac{u'(t)}{t} - \frac{u(t)}{t^2} = \frac{1}{t}\big(h(v(t)) - v(t)\big)\,,$$

also eine Differentialgleichung, die man mit Separation der Variablen lösen kann.

(iii) *Für die Bernoullischen Differentialgleichungen*

$$u' = a(t)u + b(t)u^\alpha$$

mit $\alpha \neq 1$ und $u > 0$, für die wir zuvor einen komplizierten integrierenden Faktor gefunden hatten, so dass man the Theorie exakter Gleichungen verwenden konnte, bietet sich die (t-unabhängige) Transformation

$$v = \widetilde{T}(u) := u^{1-\alpha} \quad \textit{oder äquivalent} \quad u = \widetilde{T}^{-1}(v) = v^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

an. Differenziert man hier $v(t) = u(t)^{1-\alpha}$, ergibt sich

$$\begin{aligned} v'(t) &= (1-\alpha)u(t)^{-\alpha}u'(t) = (1-\alpha)u(t)^{-\alpha}\big[a(t)u(t) + b(t)u(t)^\alpha\big] \\ &= (1-\alpha)a(t)v(t) + (1-\alpha)b(t)\,, \end{aligned}$$

also eine lineare, inhomogene Gleichung erster Ordnung, für die wir mit Satz 2.5 *die Lösungsformel*

$$v(t) = \exp\big(-(1-\alpha)A_0(t)\big)\Big[y_0 + \int_{t_0}^{t}(1-\alpha)b(s)\exp\big((1-\alpha)A_0(s)\big)\,ds\Big]$$

mit $A_0(t) := \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$ *haben. Durch die Rücktransformation* $u(t) = v(t)^{1/(1-\alpha)}$ *erhalten wir dann eine Lösung der Bernoullischen Gleichungen.*

Bemerkung 2.25. *Anhand von Beispiel* 2.22 (ii) *können wir bereits erahnen, dass es für die allgemeine Riccati-Gleichung*

$$u' = a(t)u^2 + b(t)u + c(t) \tag{2.6}$$

mit stetigen Funktionen $a, b, c\colon I \to \mathbb{R}$ *(und mit einem Intervall* $I \subset \mathbb{R}$*) keine elementare Lösungsmethode gibt. Kennt man jedoch bereits eine spezielle Lösung* $u_{par}\colon I \to \mathbb{R}$*, so ist eine Funktion* $u\colon I \to \mathbb{R}$ *genau dann eine Lösung der Riccati-Gleichung, falls sie sich als*

$$u = u_{par} + u_B$$

darstellen lässt, wobei u_B *eine Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung*

$$u' = \big[2a(t)u_{par}(t) + b(t)\big]u + a(t)u^2 \tag{2.7}$$

(mit $\alpha = 2$*) ist.*

Beweis der Bemerkung. Sei zunächst u eine weitere Lösung der Riccati-Gleichung (2.6). Dann gilt

$$\begin{aligned}
\big(u(t) - u_{par}(t)\big)' &= a(t)\big((u(t))^2 - (u_{par}(t))^2\big) + b(t)\big(u(t) - u_{par}(t)\big)\\
&= a(t)\big(u(t) - u_{par}(t) + 2u_{par}(t)\big)\big(u(t) - u_{par}(t)\big) + b(t)\big(u(t) - u_{par}(t)\big)\\
&= a(t)\big(u(t) - u_{par}(t)\big)^2 + \big[2a(t)u_{par}(t) + b(t)\big]\big(u(t) - u_{par}(t)\big)
\end{aligned}$$

für $t \in I$, also löst $u_B := u - u_{par}$ wie behauptet die Bernoullische Differentialgleichung (2.7).

Ist umgekehrt u_B eine beliebige Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung (2.7), so folgt

$$\begin{aligned}
\big(u_{par}(t) + u_B(t)\big)' &= a(t)(u_{par}(t))^2 + b(t)u_{par}(t) + c(t) + \big[2a(t)u_{par}(t) + b(t)\big]u_B(t) + a(t)(u_B(t))^2\\
&= a(t)\big(u_{par}(t) + u_B(t)\big)^2 + b(t)\big(u_{par}(t) + u_B(t)\big) + c(t)
\end{aligned}$$

für $t \in I$, also löst $u := u_{par} + u_B$ tatsächlich die Riccati-Gleichung (2.6). □

Kapitel 3

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Wir beginnen nun mit der systematischen Entwicklung der Theorie zu gewöhnlichen Differentialgleichungen in allgemeiner Form. Zunächst befassen wir uns mit der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen sowie ihrer Abhängigkeit von der Daten. Hierbei können wir uns wegen der Reduktion der Ordnung im Wesentlichen wieder auf Anfangswertprobleme für Gleichungen erster Ordnung beschränken, und zwar in expliziter Form, d.h. wir betrachten

$$\begin{cases} u' &= f(t,u) \\ u(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

für eine (stetige) Strukturfunktion $f\colon D \to \mathbb{R}^N$ (mit $D \subset \mathbb{R}^{1+N}$ einer offenen Menge) und $(t_0, x_0) \in D$. Für konkrete Anwendungen ist diese allgemeine Theorie insofern relevant, dass es sich typischerweise um Gleichungen handelt, die sich nicht explizit lösen lassen, aber man auch in diesem Fall Informationen über die Lösbarkeit und die Eigenschaften der Lösungen gewinnen möchte.

3.1 Näherungslösungen

Hier werden kurz zwei Verfahren, nämlich das Eulersche Polygonzugverfahren und die Picard-Iteration, zur Gewinnung von Näherungslösungen für das Anfangswertproblem (3.1) vorgestellt. Die wesentliche Idee ist dabei, eine Folge von Funktionen zu konstruieren, die (unter gewissen Annahmen) im Limes gegen eine exakte Lösung konvergiert.

Eulersches Polygonzugverfahren. Es handelt sich hierbei um ein einfaches Verfahren zur Bestimmung einer numerischen Lösung für ein gegebenes Anfangswertproblem. Das Verfahren ist geometrisch motiviert, und die numerische Lösung wird zu festen, diskreten Zeitpunkten mithilfe des zur Gleichung gehörigen Steigungsfeldes iterativ konstruiert. Das grundsätzliche Vorgehen im Eulerschen Polygonzugverfahren ist folgendermaßen:

(1) Wähle eine feste Zeitschrittweite $h > 0$ und definiere diskrete Zeitpunkte

$$t_j (:= t_j^{(h)}) := t_0 + jh \quad \text{für } j \in \mathbb{Z}$$

(die Zeitpunkte t_j liegen also für $j > 0$ nach t_0 und für $j < 0$ vor t_0).

(2) Ermittle die numerische Lösung iterativ bei jedem Zeitpunkt t_j durch die Näherung durch das *explizite Euler-Verfahren*. Dabei nutzen wir die Gleichung für die numerische Lösung in den Stützstellen

$$u'(t_j) = f(t_j, u(t_j))$$

und approximieren die Ableitung durch

$$u'(t_j) \approx \frac{u(t_{j+1}) - u(t_j)}{h} \quad \text{für } j > 0 \quad \text{und} \quad u'(t_j) \approx \frac{u(t_j) - u(t_{j-1})}{h} \quad \text{für } j < 0\,.$$

Insgesamt bekommen wir also an den Stützstellen als Werte für die Näherungslösung u_h zu Schrittweite h

$$\begin{aligned}
u_h(t_0) &= x_0 \\
u_h(t_1) &= x_0 + hf(t_0, x_0) =: x_1 \\
u_h(t_{j+1}) &= u_h(t_j) + hf(t_j, u_h(t_j)) = x_j + hf(t_j, x_j) =: x_{j+1} \quad \text{für } j \geq 1 \\
u_h(t_{-1}) &= x_0 - hf(t_0, x_0) =: x_{-1} \\
u_h(t_{j-1}) &= u_h(t_j) - hf(t_j, u_h(t_j)) = x_j - hf(t_j, x_j) =: x_{j-1} \quad \text{für } j \leq -1
\end{aligned}$$

und müssen das Verfahren stoppen, sobald (t_j, x_j) nicht mehr im Definitionsbereich D des Steigungsfeldes f liegt.

(3) Definiere nun die numerische Lösung u_h als die stückweise affine Funktion

$$u_h(t) := x_j + (t - t_j) f(t_j, x_j) \quad \begin{cases} \text{für } t \in [t_j, t_{j+1}) \text{ für ein } j \in \mathbb{N}_0\,, \\ \text{für } t \in [t_{j-1}, t_j) \text{ für ein } j \in -\mathbb{N}_0\,. \end{cases}$$

Auf den so gewonnenen Näherungslösungen wird der Existenzsatz von Peano aus Kapitel 3.2 beruhen, bei dem wir im Wesentlichen noch die Konvergenz für Schrittweite $h \searrow 0$ gegen eine Lösung des Anfangswertproblems (3.1) beweisen müssen.

Bemerkung 3.1. *Mit vollständiger Induktion sieht man*

$$\begin{aligned}
u_h(t_{j+1}) &= u_h(t_j) + hf(t_j, u_h(t_j)) = u_h(t_0) + h \sum_{\ell=0}^{j} f(t_\ell, u_h(t_\ell)) \quad \textit{für } j \in \mathbb{N}_0\,, \\
u_h(t_{j-1}) &= u_h(t_j) - hf(t_j, u_h(t_j)) = u_h(t_0) - h \sum_{\ell=j}^{0} f(t_\ell, u_h(t_\ell)) \quad \textit{für } j \in -\mathbb{N}_0\,.
\end{aligned}$$

Falls f nicht explizit von der abhängigen Variable u abhängt und man alle Zeitpunkte in einem vorgegebenen Intervall (t^-, t^+) mit $t^- < t_0 < t^+$ betrachtet, so konvergieren die Ausdrücke auf der rechten Seite bei $h \searrow 0$ genau gegen die Riemann-Integrale

$$x_0 + \int_{t_0}^{t^+} f(s)\, ds \qquad \textit{bzw.} \qquad x_0 - \int_{t^-}^{t_0} f(s)\, ds\,,$$

also gegen die rechte Seite der integralen Form der Differentialgleichung, vgl. Satz 1.20.

Picard-Iterierte. Bei der Picard-Iteration handelt es sich um eine Fixpunkt-Iterationsmethode, bei der man sukzessive die Gleichung approximiert. Das grundsätzliche Vorgehen ist dabei das folgende:

(1) Schreibe zunächst das Anfangswertproblem (3.1) mit Satz 1.20 als Integralgleichung

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \quad \big(=: F[u](t) \big)$$

um (und fasse dabei die rechte Seite als Funktion von den stetigen Funktionen in sich selbst auf).

(2) Definiere iterativ approximative Lösungen u_n, die sogenannten *Picard-Iterierten*, als

$$\begin{aligned} u_0(t) &\coloneqq x_0\,, \\ u_{n+1}(t) &\coloneqq x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_k(s))\,ds \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dies können wir für jede Iterierte u_{n+1} jeweils auf dem größten Intervall (t_{n+1}^-, t_{n+1}^+) machen, auf dem die Vorgängerfunktion u_n existiert und ihr Graph $\{(t, u_n(t))\colon t \in (t_{n+1}^-, t_{n+1}^+)\} \subset D$ erfüllt.

Auf den so gewonnenen Näherungslösungen wird der Existenzsatz von Picard–Lindelöf aus Kapitel 3.3 beruhen, und auch hier geht es im Wesentlichen darum, Konvergenzaussagen zu zeigen. Kann man zeigen, dass die Folge von Funktionen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichmäßig gegen eine Funktion u_∞ konvergiert, so dass dabei auch die Folge von Funktionen $(s \mapsto f(s, u_n(s)))_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichmäßig gegen die Funktion $s \mapsto f(s, u_\infty(s))$ konvergiert, so folgt aus dem Grenzübergang $n \to \infty$ in (3.2)

$$u_\infty(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_\infty(s))\,ds$$

und u_∞ ist damit Fixpunkt von F, also nach Satz 1.20 die gesuchte Lösung.

Bemerkung 3.2. *Falls f nicht explizit von der abhängigen Variable u abhängt, so stellt die Definition der ersten Picard-Iterierten u_1 die Integralgleichung zum Anfangswertproblem* (3.1) *dar, und damit ist u_1 bereits die Lösung zu* (3.1)*.*

Das Picard-Verfahren an sich ist, wie auch das Euler-Verfahren, recht flexibel und funktioniert beispielsweise auch für Systeme von Gleichungen. Eine explizite Berechnung der Integrale in der Picard-Iteration ist aber nicht immer möglich.

Beispiele 3.3.

(i) *Wir möchten Näherungslösungen für das Anfangswertproblem $u' = \log(t)$ mit $u(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$ für Zeiten $t > t_0 > 0$ bestimmen.*

- *Euler-Verfahren: Zu Schrittweite $h > 0$ definieren wir nach Bemerkung* 3.1 *die Näherungslösung u_h an den Zeitpunkten $(t_0 + jh)_{j\in\mathbb{N}_0}$ als*

$$\begin{aligned} u_h(t_0) &\coloneqq x_0\,, \\ u_h(t_0 + (j+1)h) &\coloneqq x_0 + h\sum_{\ell=0}^{j} \log(t_0 + \ell h) \qquad \text{für } j \in \mathbb{N}_0\,. \end{aligned}$$

Will man die Lösung des Anfangswertproblems zu einem festen *Zeitpunkt t approximieren, so bieten sich die Schrittweiten $h_n \coloneqq (t - t_0)/n$ für $n \in \mathbb{N}$ an (damit gilt dann $t_0 + nh_n = t$). Mit der Approximation des Riemann-Integrals durch Riemann-Summen folgt dann*

$$\begin{aligned} u_{h_n}(t) = u_{h_n}(t_0 + nh_n) &= x_0 + \frac{t - t_0}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \log\Big(t_0 + j\frac{t - t_0}{n}\Big) \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad x_0 + \int_{t_0}^{t} \log(s)\,ds = x_0 + t\log(t) - t - t_0\log(t_0) + t_0\,. \end{aligned}$$

- *Picard-Iteration: Die erste Picard-Iterierte*

$$u_1(t) \coloneqq x_0 + \int_{t_0}^{t} \log(s)\,ds$$

ist hier bereits die Lösung, vgl. Bemerkung 3.2*.*

(ii) *Für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ möchten wir Näherungslösungen für das Anfangswertproblem $u' = \alpha u$ auf $\mathbb{R}$ mit $u(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$ bestimmen (das wir bereits in Beispiel* 1.8 (i) *gelöst haben).*

- *Euler-Verfahren: Zu Schrittweite $h > 0$ bekommen wir als Näherungslösung u_h an den Zeitpunkten $(t_0 + jh)_{j \in \mathbb{N}_0}$ mit Induktion*

$$u_h(t_0) := x_0\,,$$
$$u_h(t_0 + (j+1)h) := x_0 + h\alpha \sum_{\ell=0}^{j} u_h(t_0 + \ell h) = x_0(1 + h\alpha)^{j+1} \qquad \text{für } j \in \mathbb{N}_0\,.$$

Für festes $t \in \mathbb{R}$ bekommen wir mit Schrittweiten $h_n := (t - t_0)/n$ für $n \in \mathbb{N}$ wie oben

$$u_{h_n}(t) = u_{h_n}(t_0 + nh_n) = x_0\Big(1 + \frac{t - t_0}{n}\alpha\Big)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0 \exp(\alpha(t - t_0))$$

mit der aus der Analysis-Vorlesung bekannten Folgendarstellung der Exponentialfunktion.

- *Picard-Iteration: Ausgehend von $u_0 \equiv x_0$ bestimmen wir*

$$u_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha x_0\, ds = x_0\big[1 + \alpha(t - t_0)\big]$$
$$u_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha x_0\big[1 + \alpha(s - t_0)\big]\, ds = x_0\Big[1 + \alpha(t - t_0) + \frac{\alpha}{2}(t - t_0)^2\Big]$$
$$u_n(t) = x_0 \sum_{j=0}^{n} \frac{\alpha^j (t - t_0)^j}{j!} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}\,,$$

und mit der aus der Analysis-Vorlesung bekannten Reihendarstellung der Exponentialfunktion erhalten wie ebenfalls $u_n(t) \to x_0 \exp(\alpha(t - t_0))$ bei $n \to \infty$.

Bei der Beurteilung der Güte einer Näherungslösung hilft uns später die folgende

Definition 3.4. *Sei $D \subset \mathbb{R}^{1+N}$ offen, $(t_0, x_0) \in D$, $f\colon D \to \mathbb{R}^N$ stetig und $\varepsilon > 0$. Eine stetige, stückweise differenzierbare Funktion $u_\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}^N$ (mit $I \subset \mathbb{R}$ einem Intervall) nennt man eine ε-*Näherungslösung *des Anfangswertproblems $u' = f(t, u)$ mit $u(t_0) = x_0$, falls $t_0 \in I$ und für den Graph $\{(t, u_\varepsilon(t))\colon t \in I\} \subset D$ gelten sowie die Ungleichungen*

$$|u_\varepsilon(t_0) - x_0| \le \varepsilon\,,$$
$$|u_\varepsilon'(t) - f(t, u_\varepsilon(t))| \le \varepsilon \quad \text{für alle Differenzierbarkeitsstellen } t \in I$$

erfüllt sind.

Wie gut die beiden vorgestellten Näherungslösungen sind, kann man ohne weitere Voraussetzungen noch nicht beurteilen. In jedem Fall überträgt sich aber die Approximationsgüte direkt auf die Integralgleichung:

Lemma 3.5. *Sei $D \subset \mathbb{R}^{1+N}$ offen, $(t_0, x_0) \in D$, $f\colon D \to \mathbb{R}^N$ stetig und $\varepsilon > 0$. Ist $u_\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}^N$ (mit $I \subset \mathbb{R}$ einem Intervall) eine ε-Näherungslösung des Anfangswertproblems $u' = f(t, u)$ mit $u(t_0) = x_0$, so gilt für alle $t \in I$*

$$\Big|u_\varepsilon(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, u_\varepsilon(s))\, ds\Big| \le \varepsilon\big(1 + |t - t_0|\big)\,.$$

Beweis. Wir nehmen ohne Einschränkung $t_0 < t$ an. Mit $t_1 < t_2 < \ldots < t_{M-1}$ bezeichnen wir im Folgenden die Punkte in $[t_0, t]$, in denen u_ε nicht stetig differenzierbar ist, und setzen $t_M := t$. Mit

dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und mit der Definition der ε-Näherungslösung erhalten wir dann die Behauptung:

$$\begin{aligned}
&\Big|u_\varepsilon(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, u_\varepsilon(s))\, ds\Big| \\
&\quad = \Big|\sum_{j=1}^{M} \big(u_\varepsilon(t_j) - u_\varepsilon(t_{j-1})\big) + u_\varepsilon(t_0) - x_0 - \sum_{j=1}^{M} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(s, u_\varepsilon(s))\, ds\Big| \\
&\quad \le |u_\varepsilon(t_0) - x_0| + \sum_{j=1}^{M} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |u_\varepsilon'(s) - f(s, u_\varepsilon(s))|\, ds \\
&\quad \le \varepsilon + \varepsilon \sum_{j=1}^{M} |t_j - t_{j-1}| = \varepsilon\big(1 + |t - t_0|\big)\,. \qquad \square
\end{aligned}$$

3.2 Der Satz von Peano

Wir behandeln nun einen ersten allgemeinen Existenzsatz für das Anfangswertproblem (3.1). Mithilfe des Eulerschen Polygonzugverfahren zeigen wir dabei, lediglich unter einer Stetigkeitsannahme an die Strukturfunktion, dass es immer eine lokale Lösung gibt (also die in einem hinreichend kleinen Intervall um t_0 definiert ist). Dieses Resultat ist bezüglich der Annahme an die Strukturfunktion tatsächlich optimal, d.h. man kann ohne Stetigkeit der Strukturfunktion keine Lösbarkeit erwarten. Für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$u' = \operatorname{sign}(t)$$

(also mit der unstetigen Strukturfunktion $f(t, u) = \operatorname{sign}(t)$) kann der Zeitpunkt $t = 0$ niemals im Inneren eines Lösungsintervalls liegen, da die Lösung sonst nicht die Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit erfüllt. Wesentliches Hilfsmittel für den Beweis der Konvergenz der Euler-Polygone ist der folgende Kompaktheitssatz:

Satz 3.6 (Arzelà–Ascoli)**.** *Sei $K \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $N \in \mathbb{N}$, und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen in $C(K, \mathbb{R}^N)$ mit den Eigenschaften, dass*

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt *ist, d.h.*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in K} |u_n(t)| < \infty\,,$$

(ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig stetig *ist, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass*

$$|u_n(t) - u_n(\tilde{t})| < \varepsilon$$

für alle $t, \tilde{t} \in K$ mit $|t - \tilde{t}| < \delta$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Dann gibt es eine Teilfolge von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gleichmäßig gegen eine (stetige) Grenzfunktion $u \in C(K, \mathbb{R}^N)$ konvergiert.

Bemerkungen 3.7. *Man kann sich leicht Folgen von Funktionen überlegen, die zeigen, dass die Voraussetzungen der Kompaktheit des Definitionsgebietes, die gleichmäßige Beschränktheit und die gleichgradige Stetigkeit der Folge tatsächlich notwendig sind:*

(i) *Sei $h \in C(\mathbb{R})$ eine beliebige stetige, nichtverschwindende Funktion mit kompaktem Träger im Intervall $[0, 1]$. Dann definieren wir die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen in $C(\mathbb{R})$ über*

$$u_n(x) := h(n + x) \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}\,.$$

Diese Folge von Funktionen ist offensichtlich gleichmäßig beschränkt durch $\max_{x\in[0,1]}|h(x)|$*, und auch die gleichgradige Stetigkeit vererbt sich direkt von der (gleichmäßigen) Stetigkeit von* h*. Hier gilt* punktweise Konvergenz *der Folge* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* $u \equiv 0$*, jedoch ist die Konvergenz nicht gleichmäßig, da* $\sup_{x\in\mathbb{R}}|u_n - 0| = \max_{x\in[0,1]}|h(x)| > 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt. Ohne Kompaktheit des Definitionsgebietes der Funktionenfolge kann die Aussage von Arzelà–Ascoli also nicht gelten.*

(ii) *Sei* $K = [0,1]$*, und wir definieren eine Folge* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von Funktionen in* $C([0,1])$ *über*

$$u_n(x) := n \qquad \text{für } x \in [0,1] \text{ und } n \in \mathbb{N}\,.$$

Diese Funktionen sind offensichtlich auf einem kompakten Intervall definiert und gleichgradig stetig (tatsächlich ist δ *für jede Wahl von* $\varepsilon > 0$ *beliebig), aber nicht gleichmäßig beschränkt, und es gilt* $u_n(x) \to \infty$ *bei* $n \to \infty$*. Also ist die gleichmäßige Beschränktheit der Funktionenfolge für die Auswahl einer konvergenten Teilfolge notwendig.*

(iii) *Sei* $K = [-1,1]$*, und wir definieren eine Folge* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von Funktionen in* $C([-1,1])$ *über*

$$u_n(x) := \tanh(nx) \qquad \text{für } x \in [-1,1] \text{ und } n \in \mathbb{N}\,.$$

Diese Funktionen sind auf einem kompakten Intervall definiert und betragsmäßig durch 1 *gleichmäßig beschränkt, jedoch sind sie nicht gleichgradig stetig, da in der* ε*-*δ*-Definition von Stetigkeit das* δ *in einer Umgebung vom Ursprung immer kleiner gewählt werden muss, je größer* n *wird (die Funktionen werden durch den Ursprung immer steiler). Für die Folge* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gilt* punktweise Konvergenz *gegen* $u(x) = \operatorname{sign}(x) \notin C([-1,1])$*, jedoch keine gleichmäßige Konvergenz, da* $\sup_{x\in\mathbb{R}}|u_n - \operatorname{sign}(x)| = 1$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt. Daher ist auch die gleichgradige Stetigkeit für die Aussage von Arzelà–Ascoli notwendig.*

Bemerkungen 3.8.

(i) *Die Voraussetzung* (ii) *der gleichgradigen Stetigkeit ist insbesondere dann erfüllt, wenn man eine Zahl* $L > 0$ *findet, so dass die Ungleichung*

$$|u_n(t) - u_n(\tilde{t})| \le L|t - \tilde{t}| \qquad \text{für alle } t, \tilde{t} \in K \text{ und alle } n \in \mathbb{N}$$

erfüllt ist (und Voraussetzung (ii) *gilt dann für die Wahl* $\delta = \varepsilon/L$*).*

(ii) *Die Aussage des Satzes von Arzelà–Ascoli gilt auch für allgemeine kompakte Mengen* K *in* $\mathbb{R}$ *(jedoch muss dann der Beweis entsprechend angepasst werden).*

Beweis von Satz 3.6. Der Vollständigkeit halber wiederholen wir kurz die Beweisidee und den Beweis. Die wesentlichen Ideen sind es, die erste Voraussetzung (i) der gleichmäßigen Beschränktheit zu nutzen, um die Konvergenz auf abzählbar vielen Punkten mithilfe des Satzes von Bolzano–Weierstrass sowie einem Diagonalargument zu sichern. Anschließend erzielt man mit der zweiten Voraussetzung (ii) der gleichgradigen Stetigkeit und der Kompaktheit von K eine Verbesserung zu gleichmäßiger Konvergenz.

Schritt 1: Auswahl einer Teilfolge, die auf allen rationalen Punkte konvergiert. Wir nummerieren zunächst alle rationalen Punkte in K, schreiben also

$$K \cap \mathbb{Q} = \{t_k \in \mathbb{R} \colon k \in \mathbb{N}\}$$

für eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Wir betrachten nun zunächst die Folge von reellen Zahlen $(u_n(t_1))_{n\in\mathbb{N}}$. Mit Bolzano–Weierstrass finden wir wegen der Annahme (i) der gleichmäßigen Beschränktheit eine konvergente Teilfolge, die wir mit $(u_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnen. Nun verfahren wir induktiv. Ist $(u_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die in den Punkten $\{t_1, \dots, t_j\}$ konvergiert, so wählen wir eine Teilfolge $(u_{j+1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ daraus aus, so dass auch $(u_{j+1,n}(t_{j+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Die Diagonalfolge $(u_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ leistet nun die gewünschte punktweise Konvergenz in allen Punkten $K \cap \mathbb{Q}$: betrachtet man einen beliebigen Punkt t_k, so ist $(u_{n,n})_{n\ge k}$ nach Konstruktion eine Teilfolge von $(u_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ und konvergiert damit tatsächlich im Punkt t_k.

Schritt 2: Verbesserung zu gleichmäßiger Konvergenz auf K. Da der Raum $C(K)$ der stetigen Funktionen auf einer kompakten Menge bzgl. der Supremumsnorm vollständig ist, müssen wir nur noch zeigen, dass die eben konstruierte Teilfolge, ohne Einschränkung ab hier wieder die Folge selbst, eine Cauchy-Folge bzgl. der Supremumsnorm ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen der Eigenschaft (ii) der gleichgradigen Stetigkeit finden wir δ (in Abhängigkeit von ε), so dass

$$|u_n(t) - u_n(\tilde{t})| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für alle } t, \tilde{t} \in K \text{ mit } |t - \tilde{t}| < \delta \text{ und alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt. Da K außerdem kompakt ist, finden wir endlich viele Punkte $s_1, \ldots, s_{M(\delta)} \in K \cap \mathbb{Q}$ mit

$$\bigcup_{k=1}^{M(\delta)} (s_k - \delta, s_k + \delta) \supset K\,. \tag{3.3}$$

Da die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Schritt 1 in allen rationalen Punkten konvergiert und wir nun lediglich die endliche Menge an Punkten $\{s_1, \ldots, s_{M(\delta)}\}$ betrachten, können wir nun noch $n_0 \in \mathbb{N}$ fixieren, so dass

$$|u_m(s_k) - u_n(s_k)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für alle } k \in \{1, \ldots, M(\delta)\} \text{ und } m, n \geq n_0 \tag{3.4}$$

erfüllt ist. Zu einem beliebigen $t \in K$ bestimmen wir nun einen Punkt s_k mit $t \in (s_k - \delta, s_k + \delta)$. Mithilfe von (3.3) und (3.4) berechnen wir dann für $m, n \geq n_0$

$$|u_m(t) - u_n(t)| \leq |u_m(t) - u_m(s_k)| + |u_m(s_k) - u_n(s_k)| + |u_n(s_k) - u_n(t)| < \varepsilon$$

und haben damit die Eigenschaft der gleichmäßigen Cauchy-Folge für $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gezeigt. Also konvergiert die Folge tatsächlich gleichmäßig auf der kompakten Menge K und der Satz von Arzelà–Ascoli ist bewiesen. □

Damit kommen wir nun zur ersten Aussage zur Existenz einer lokalen Lösung für das Anfangswertproblem (3.1).

Satz 3.9 (von Peano, quantitative Version)**.** *Seien a, $b > 0$ und $N \in \mathbb{N}$. Zum Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} u' &= f(t, u) \\ u(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

mit stetiger Strukturfunktion $f\colon [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_b(x_0) \to \mathbb{R}^N$ (mit $\overline{B}_b(x_0)$ der abgeschlossenen Kugel in $\mathbb{R}^N$ mit Radius b und Mittelpunkt x_0) existiert mindestens eine Lösung auf dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ mit

$$\alpha := \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} \qquad \text{für } M := \max\left\{|f(t,x)|\colon (t,x) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_b(x_0)\right\}$$

(und der Konvention $b/M = \infty$ für $M = 0$).

Bemerkungen 3.10.

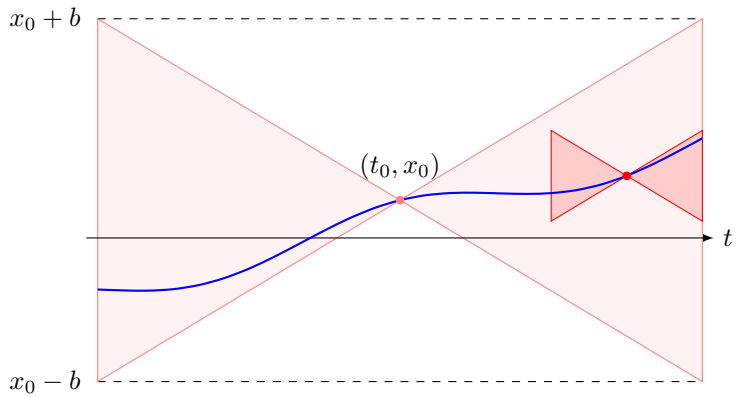
(i) *Wie wir bereits gesehen haben, können wir selbst für den Fall, dass die Strukturfunktion f auf ganz $\mathbb{R}^n$ existiert und stetig ist, nicht erwarten, dass Lösungen für alle Zeiten existieren. Für das Anfangswertproblem $u' = 1 + u^2$ mit $u(t_0) = x_0$ haben wir in Beispiel* 2.4 (ii) *die Lösungsformel $u(t) = \tan(t - t_0 + \arctan(x_0))$ hergeleitet, und diese Lösung existiert nur auf einem Intervall der Länge π. Eine Schranke an die Länge des Lösungsintervalls ist also notwendig.*

(ii) *Mit* quantitativer Version *ist gemeint, dass die Aussage des Satzes nicht nur die Existenz einer lokalen Lösung betrifft, sondern dass auch eine untere Schranke an die Länge des Existenzintervalls angegeben wird. Dazu muss man beachten, dass die Lösungskurve für dieses Intervall komplett in der Menge $[t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_b(x_0)$ liegen muss, in der f stetig ist. In t-Richtung verlässt die*

Lösung diese Menge offensichtlich bei $t_0 \pm a$, daher muss $\alpha \leq a$ gelten. Das Verlassen in x-Richtung ist subtiler, da man die Werte der Lösung betrachten muss. Mit der Darstellung der Differentialgleichung als Integralgleichung aus Satz 1.20 *und der Beschränktheit von f durch M bekommen wir, solange u noch in der zulässigen Menge verläuft, die Abschätzung*

$$|u(t) - x_0| = \Big| \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \Big| \leq |t - t_0| M \,,$$

und die rechte Seite ist sicher höchstens b, falls $|t - t_0| \leq b/M$ gilt, was nun die zweite Einschränkung an α erklärt. Zusätzlich wissen wir aus der letzten Ungleichung, dass die Lösung immer innerhalb des von (t_0, x_0) ausgehenden Doppelkegels mit Steigung $\pm M$ liegt (und sogar in dem von jedem anderen Punkt $(t, u(t))$ ausgehenden, solange t im Existenzintervall liegt).



Tatsächlich ist die Aussage optimal und man kann die Existenz einer lokalen Lösung im Allgemeinen auf keinem größeren Existenzintervall zeigen. Dazu reicht es, die Strukturfunktion immer maximal zu wählen, also etwa

$$f \equiv M \quad \text{in } \mathbb{R} \times \overline{B}_b(x_0)\,.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems $u' = M$ mit $u(t_0) = x_0$ ist $u(t) = x_0 + M(t - t_0)$, und sie ist definiert genau für alle $t \in \mathbb{R}$ mit

$$|x_0 + M(t - t_0) - x_0| = M|t - t_0| \leq b\,,$$

also für $|t - t_0| \leq b/M$.

(iii) *Unter einer Stetigkeitsannahme an die Strukturfunktion wie im Satz von Peano können wir keine Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems erwarten. Für die gewöhnliche Differentialgleichung $u' = 2\,\mathrm{sign}(u)\sqrt{|u|}$, vgl. Beispiel* 2.4 (iii)*, ist die Strukturfunktion zwar stetig, jedoch haben wir gesehen, dass für den Anfangswert $x_0 = 0$ unendlich viele Lösungen existieren.*

Beweis von Satz 3.9. Ohne Einschränkung dürfen wir voraussetzen, dass $M > 0$ gilt, denn im Fall $M = 0$ haben wir $f \equiv 0$, und damit ist $u \equiv x_0$ eine auf $[t_0 - a, t_0 + a]$ definierte Lösung des Anfangswertproblems.

Schritt 1: Konstruktion einer Näherungslösung über das Eulersche Polygonzugverfahren. Unser Ziel ist es, zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ eine $1/n$-Näherungslösung des Anfangswertproblems auf dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ zu konstruieren. Dazu fixieren wir in diesem Schritt die relevanten Parameter. Da f auf der kompakten Menge $[t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_b(x_0)$ gleichmäßig stetig ist, bestimmen wir zunächst $\delta(n) > 0$ so dass

$$|f(t, x) - f(\tilde{t}, \tilde{x})| \leq \frac{1}{n} \qquad \begin{array}{l} \text{für alle } t, \tilde{t} \in [t_0 - a, t_0 + a], x, \tilde{x} \in \overline{B}_b(x_0) \\ \text{mit } |t - \tilde{t}| \leq \delta(n) \text{ und } |x - \tilde{x}| \leq \delta(n) \end{array}$$

gilt. Anschließend legen wir die Schrittweite $h(n)$ für das Eulersche Polygon fest, so dass

$$h(n) < \min\left\{\delta(n), \delta(n)/M\right\} \quad \text{mit } h(n)k(n) = \alpha \text{ für ein } k(n) \in \mathbb{N} \tag{3.5}$$

erfüllt ist. Insbesondere gilt mit dieser Wahl $t_0 \pm \alpha = t_0 \pm k(n)h(n)$, so dass es insgesamt die $2k(n)+1$ Stützstellen

$$t_j \coloneqq t_0 + jh(n) \quad \text{für } j \in \{-k(n), \dots, k(n)\}$$

im Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ gibt. Nun definieren wir wie in Kapitel 3.1 induktiv die Werte

$$\begin{aligned} x_{j+1} &\coloneqq x_j + h(n)f(t_j, x_j) \quad \text{für } j \in \{0, 1, \dots, k(n)-1\}\,, \\ x_{j-1} &\coloneqq x_j - h(n)f(t_j, x_j) \quad \text{für } j \in \{-k(n)+1, \dots, -1, 0\}\,. \end{aligned}$$

Alle diese Punkte sind tatsächlich wohldefiniert und liegen in $\overline{B}_b(x_0)$. Für x_0 ist das offensichtlich der Fall, und für $j \in \{1, \dots, k(n)\}$ folgt dies mit Induktion

$$|x_j - x_0| \le \sum_{\ell=0}^{j-1} |x_{\ell+1} - x_\ell| = h(n) \sum_{\ell=0}^{j-1} |f(t_\ell, x_\ell)| \le h(n)jM \le h(n)k(n)M = \alpha M \le b$$

nach Wahl von α, und dies gilt analog auch für alle $j \in \{-k(n), \dots, -1\}$. Damit ist das Eulersche Polygon zur Schrittweite $h(n)$ als

$$u_{h(n)}(t) \coloneqq x_j + (t - t_j)f(t_j, x_j) \quad \begin{cases} \text{für } t \in [t_j, t_{j+1}] \text{ für ein } j \in \{0, 1, \dots, k(n)-1\}\,, \\ \text{für } t \in [t_{j-1}, t_j] \text{ für ein } j \in \{-k(n)+1, \dots, -1, 0\}\,. \end{cases}$$

wohldefiniert.

Schritt 2: Nachweis der $1/n$-Näherungslösungseigenschaft von $u_{h(n)}$. Nach Konstruktion ist $u_{h(n)}$ stückweise stetig differenzierbar mit eventueller Undifferenzierbarkeit in den Stützstellen t_j für $j \in \{-k(n), \dots, k(n)\}$. Offensichtlich gilt $u_{h(n)}(t_0) = x_0$. Sei nun $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \setminus \{t_0\}$ beliebig. Für $t > t_0$ bestimmen wir den eindeutigen Index $j \in \{0, 1, \dots, k(n)-1\}$ mit $t \in (t_j, t_{j+1}]$, bzw. für $t < t_0$ den eindeutigen Index $j \in \{-k(n)+1, \dots, -1, 0\}$ mit $t \in [t_{j-1}, t_j)$. Ist t eine Differenzierbarkeitsstelle (sonst ist nichts mehr zu zeigen), so gilt $u'_{h(n)}(t) = f(t_j, x_j)$ sowie

$$|u_{h(n)}(t) - x_j| = |t - t_j||f(t_j, x_j)| \le h(n)M \le \delta(n)$$

nach Definition der Schrittweite $h(n)$ in (3.5). Da auch $|t - t_j| \le \delta(n)$ gilt, folgt nach Wahl von $\delta(n)$ nun

$$\left|u'_{h(n)}(t) - f(t, u_{h(n)}(t))\right| = \left|f(t_j, x_j) - f(t, u_{h(n)}(t))\right| \le \frac{1}{n}$$

und wir haben gezeigt, dass $u_{h(n)}$ eine $1/n$-Näherungslösung im Sinne von Definition 3.4 für das Anfangswertproblem $u' = f(t, u)$ mit $u(t_0) = x_0$ ist. Mit Lemma 3.5 folgt damit auch

$$\left|u_{h(n)}(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, u_{h(n)}(s))\, ds\right| \le \frac{1}{n}\big(1 + |t - t_0|\big)\,. \tag{3.6}$$

für alle $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Schritt 3: Auswahl einer gleichmäßig konvergenten Teilfolge. Dazu prüfen wir die Voraussetzungen vom Satz 3.6 von Arzelà–Ascoli für die Folge $(u_{h(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ von stetigen Funktionen auf dem kompakten Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

(i) Gleichmäßige Beschränktheit: Wir haben in Schritt 1 bereits gezeigt, dass die Funktionswerte $u_{h(n)}(t_j) = x_j$ für alle Stützstellen t_j mit $j \in \{-k(n), \dots, k(n)\}$ in $\overline{B}_b(x_0)$ liegen. Da das Euler-Polygon $u_{h(n)}$ stückweise affin zwischen den Stützstellen interpoliert, gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \max_{t\in[t_0-\alpha, t_0+\alpha]} |u_{h(n)}(t)| \le |x_0| + b\,.$$

(ii) Gleichgradige Stetigkeit: wir zeigen die Bedingung

$$|u_{h(n)}(t) - u_{h(n)}(\tilde{t})| \leq M|t - \tilde{t}| \qquad \text{für alle } t, \tilde{t} \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \text{ und alle } n \in \mathbb{N}\,,$$

die nach Bemerkung 3.8 (i) die gleichgradige Stetigkeit impliziert. Liegen t, $\tilde{t}$ im gleichen Intervall $[t_j, t_{j+1}]$ für ein $j \in \{-k(n), \ldots, k(n) - 1\}$, dann gilt

$$|u_{h(n)}(t) - u_{h(n)}(\tilde{t})| = \left\{ \begin{array}{ll} |t - \tilde{t}||f(t_j, x_j)| & \text{für } j > 0 \\ |t - \tilde{t}||f(t_{j+1}, x_{j+1})| & \text{für } j \leq 0 \end{array} \right\} \leq M|t - \tilde{t}|\,.$$

Liegen t, $\tilde{t}$ dagegen in unterschiedlichen Intervallen, ohne Einschränkung $t \in [t_j, t_{j+1}]$ und $\tilde{t} \in [t_\ell, t_{\ell+1}]$ für $j > \ell$, dann schmuggeln wir die Stützstellen dazwischen ein und sehen

$$\begin{aligned} |u_{h(n)}(t) - u_{h(n)}(\tilde{t})| &\leq |u_{h(n)}(t) - u_{h(n)}(t_j)| + \sum_{m=\ell+1}^{j-1} |u_{h(n)}(t_{m+1}) - u_{h(n)}(t_m)| \\ &\quad + |u_{h(n)}(t_{\ell+1}) - u_{h(n)}(\tilde{t})| \\ &\leq M|t - t_j| + M \sum_{m=\ell+1}^{j-1} |t_{m+1} - t_m| + M|t_{\ell+1} - \tilde{t}| = M|t - \tilde{t}|\,. \end{aligned}$$

Mit Satz 3.6 von Arzelà–Ascoli finden wir nun also eine Teilfolge (ohne Einschränkung die Folge selbst), die gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $u \in C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha])$ konvergiert.

Schritt 4: Der Grenzwert u löst das gegebene Anfangswertproblem. Weil f auf der Zylindermenge $[t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_b(x_0)$ gleichmäßig stetig ist und die Funktionenfolge $(u_{h(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen u konvergiert, gilt auch

$$f(s, u_{h(n)}(s)) \to f(s, u(s)) \quad \text{gleichmäßig in } s \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]\,.$$

Da man für einen gleichmäßig konvergenten Integranden die Grenzwertbildung mit der Integration vertauschen darf, folgt aus (3.6)

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} u_{h(n)}(t) = x_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, u_{h(n)}(s))\, ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds$$

für beliebiges $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$. Nach Satz 1.20 ist eine stetige Lösungen dieser Integralgleichung bereits eine Lösung des Anfangswertproblems $u' = f(t, u)$ mit $u(t_0) = x_0$ und wir haben damit den Satz von Peano bewiesen. □

Die Anwendung der quantitativen Version des Satzes von Peano erfordert prinzipiell, dass man tatsächlich das Maximum der Strukturfunktion in einer gegebenen Zylindermenge $[t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_b(x_0)$ berechnet. Wenn man sich nicht für eine untere Schranke an die Länge des Existenzintervalls interessiert, so reicht typischerweise eine *qualitative Version* des Satzes von Peano, die die lokale Lösbarkeit jeden Anfangswertproblems $u' = f(t, u)$ mit $u(t_0) = x_0$ besagt, falls die Strukturfunktion f stetig in einer Umgebung des Anfangsdatums (t_0, x_0) ist.

Korollar 3.11 (von Peano, qualitative Version)**.** *Seien $N \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^{1+N}$ offen und $(t_0, x_0) \in D$. Zum Anfangswertproblem*

$$\left\{ \begin{array}{rl} u' &= f(t, u) \\ u(t_0) &= x_0 \end{array} \right.$$

mit stetiger Strukturfunktion $f\colon D \to \mathbb{R}^N$ existiert eine lokale Lösung*, d.h. es gibt ein $\alpha > 0$ mit der Eigenschaft, dass auf dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ mindestens eine Lösung des Anfangswertproblems existiert.*

Beweis. Da D eine offene Menge in $\mathbb{R}^{1+N}$ mit $(t_0, x_0) \in D$ ist, finden wir positive Zahlen a, $b > 0$ (in Abhängigkeit von (t_0, x_0) und D), so dass $[t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_b(x_0) \subset D$ gilt. Dann betrachten wir die Einschränkung der Strukturfunktion auf diese Menge und das zugehörige Anfangswertproblem. Dieses können wir mithilfe von Satz 3.9 auf einem Intervall um t_0 lösen, dessen Länge wiederum von (t_0, x_0) (über a, b) sowie dem Maximum von f auf $[t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_b(x_0)$ abhängt. Diese Lösung ist auch eine Lösung des ursprünglichen Problems. □

3.3 Der Satz von Picard–Lindelöf

Als nächstes zeigen wir, dass das Anfangswertproblem (3.1) unter einer stärkeren Regularitätsannahme an die Strukturfunktion f, und zwar zusätzlicher Lipschitz-Stetigkeit bezüglich der abhängigen Variable, sogar eine eindeutige Lösung besitzt. Dies beruht im Wesentlichen auf der Picard-Iteration und einem Fixpunktargument.

Definition 3.12. *Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) zwei metrische Räume. Eine Funktion $T\colon X_1 \to X_2$ heißt* global Lipschitz-stetig, *falls eine Konstante $L \geq 0$ existiert, so dass*

$$d_2\big(T(x), T(\tilde{x})\big) \leq L d_2(x, \tilde{x}) \qquad \text{für alle } x, \tilde{x} \in X_1 \text{ gilt.}$$

Die Konstante L nennt man dabei eine Lipschitz-Konstante *von T. Ist T sogar global Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstante $L < 1$, so bezeichnet man T auch als eine* strikte Kontraktion.

Die Funktion T heißt ferner (lokal) Lipschitz-stetig, *falls es zu jedem Punkt $x \in X_1$ eine Umgebung U_x von x gibt, so dass die Einschränkung $T|_{U_x}$ von T global auf U_x Lipschitz-stetig ist (mit möglicherweise einer vom Punkt x abhängiger Lipschitz-Konstante L_x).*

Bemerkungen 3.13. *Für eine Funktion $T\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ gelten die folgenden Eigenschaften:*

(i) *Ist T global Lipschitz-stetig, so ist T insbesondere (lokal) Lipschitz-stetig. Die umgekehrte Implikation gilt, falls (X_1, d_1) kompakt ist, ansonsten im Allgemeinen nicht (die Funktion $T(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik ist lokal, aber nicht global Lipschitz-stetig).*

(ii) *Ist T (lokal) Lipschitz-stetig, so ist T auch stetig und erfüllt eine quantifizierte Stetigkeitsbedingung (mit $\delta = \varepsilon / L_x$ in der ε-δ-Definition von Stetigkeit), vgl. Bemerkung* 3.8 (i).

(iii) *Falls $X_1 = \mathbb{R}^n$ und $X_2 = \mathbb{R}^m$ mit euklidischer Metrik versehen sind und T differenzierbar ist, so ist T wegen des Mittelwertsatzes (lokal) Lipschitz-stetig. Ist der Betrag der Ableitung von T außerdem durch eine Konstante L beschränkt, so ist T sogar global Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L (und die Umkehrungen gelten wiederum nicht, denn $T(x) = |x|$ ist global Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$, aber im Ursprung nicht differenzierbar).*

Wesentlich für den Beweis der Existenz eines Fixpunktes ist der folgende

Satz 3.14 (Banachscher Fixpunktsatz)**.** *Ist (X, d) ein nichtleerer, vollständiger metrischer Raum und $T\colon X \to X$ eine strikte Kontraktion mit Konstante $L < 1$, so besitzt T* genau einen Fixpunkt, *d.h. es gibt einen eindeutigen Punkt $\bar{x} \in X$ mit $T(\bar{x}) = \bar{x}$. Zusätzlich gilt: Ist $x_0 \in X$ beliebig, so konvergiert die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definiert als $x_{n+1} := T(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$, gegen $\bar{x}$, und für $k \in \mathbb{N}$ gilt die* a priori Fehlerabschätzung

$$d(x_k, \bar{x}) \leq \frac{1}{1-L} d(x_k, x_{k+1}) \leq \frac{L^k}{1-L} d(x_0, x_1)\,.$$

Beweis. Der Beweis ist konstruktiv und startet mit einem beliebigen $x_0 \in X$ sowie der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definiert über $x_{n+1} := T(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Nach Definition dieser Folge und der Lipschitz-Stetigkeit von T gilt für den Abstand zweier Folgenglieder

$$d(x_k, x_{k+1}) = d(T(x_{k-1}), T(x_k)) \leq L d(x_{k-1}, x_k)\,.$$

Induktiv folgt daher

$$d(x_j, x_{j+1}) \leq L^{j-k} d(x_k, x_{k+1})$$

für $j \geq k$. Mit der Dreiecksungleichung und der geometrischen Reihe erhalten wir

$$d(x_k, x_n) \leq \sum_{j=k}^{n-1} d(x_j, x_{j+1}) \leq \sum_{j=k}^{n-1} L^{j-k} d(x_k, x_{k+1}) \leq \frac{1}{1-L} d(x_k, x_{k+1}) \leq \frac{L^k}{1-L} d(x_0, x_1)$$

für $n \geq k$. Damit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (X, d) und konvergiert wegen der Vollständigkeit von (X, d) gegen ein $\bar{x} \in X$. Betrachtet man außerdem den Limes $n \to \infty$ in der letzten Ungleichung, so folgt mit

$$\lim_{n\to\infty} d(x_k, x_n) = d(x_k, \bar{x})$$

die behauptete Fehlerabschätzung. Schließlich handelt es sich bei $\bar{x}$ wegen

$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(\bar{x})$$

tatsächlich um einen Fixpunkt der Abbildung T, und zwar den einzigen. Betrachtet man nämlich einen beliebigen Fixpunkt $x \in X$, also mit $T(x) = x$, so folgt wegen

$$d(x, \bar{x}) = d(T(x), T(\bar{x})) \leq L d(x, \bar{x})$$

und $L < 1$ bereits $d(x, \bar{x}) = 0$, also $x = \bar{x}$. □

Damit kommen wir nun zu einer ersten Eindeutigkeitsaussage für die lokale Lösung des Anfangswertproblem (3.1).

Satz 3.15 (von Picard–Lindelöf, quantitative Version)**.** *Seien $a, b > 0$ und $N \in \mathbb{N}$. Zum Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} u' &= f(t, u) \\ u(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

mit stetiger Strukturfunktion $f\colon [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_b(x_0) \to \mathbb{R}^N$, die Lipschitz-stetig bezüglich der x-Variable ist, d.h. es gibt ein $L \geq 0$ mit

$$|f(t, x) - f(t, \tilde{x})| \leq L|x - \tilde{x}| \qquad \text{für alle } t \in [t_0 - a, t_0 + a] \text{ und } x, \tilde{x} \in \overline{B}_b(x_0)\,,$$

existiert genau eine *Lösung auf dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ mit*

$$\alpha := \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} \qquad \text{für } M := \max\left\{|f(t, x)|\colon (t, x) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_b(x_0)\right\}.$$

Bemerkung 3.16. *Die lokale Lösung, die wir in der quantitativen Version des Satzes 3.9 von Peano gefunden haben, ist unter der Annahme der Lipschitz-Bedingung also eindeutig, und zwar im gleichen Existenzintervall. Im Beweis werden wir jedoch nicht sofort die Eindeutigkeit dieser lokalen Lösung zeigen, sondern, da es sich um eine andere wichtige Beweismethode handelt, die Existenz einer lokalen Lösung in diesem Intervall neu beweisen und dabei gleichzeitig auf ihre Eindeutigkeit schließen.*

Beweis von Satz 3.15. Die Beweisidee ist es, das Anfangswertproblem mithilfe von Satz 1.20 zunächst als Fixpunktgleichung zu formulieren, also

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds =: T(u)(t)$$

für alle t mit $|t - t_0|$ klein genug, wobei T hier eine Abbildung vom Raum der stetigen Funktionen in sich selbst ist. Lösungen des Anfangswertproblems sind genau die Fixpunkte von T, und Existenz

und Eindeutigkeit einer Lösung auf dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ werden wir im Folgenden durch die Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes 3.14 erhalten. Wir setzen nun

$$X := C^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \overline{B}_b(x_0))$$

und statten X mit der von der gleichmäßigen Konvergenz induzierten Metrik aus. Als abgeschlossene Teilmenge von $C^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \mathbb{R}^N)$ ist X mit dieser Metrik ein vollständiger normierter Raum.

Schritt 1: T bildet X auf sich selbst ab, und ebenso T^n für $n \in \mathbb{N}$. Sei $w \in X$ beliebig. Nach Definition gilt für jedes $s \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ also $w(s) \in \overline{B}_b(x_0)$ und damit nach Definition von M auch $|f(s, w(s))| \leq M$. Mit $\alpha M \leq b$ folgt

$$|T(w)(t) - x_0| = \Big| \int_{t_0}^{t} f(s, w(s))\, ds \Big| \leq M|t - t_0| \leq M\alpha \leq b$$

für $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, also $T(w) \in X$. Die Aussage für die Picard-Iterierten T^n folgt dann induktiv wegen $T^{n+1} = T \circ T^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Schritt 2: T ist (global) Lipschitz-stetig auf X mit Lipschitz-Konstante $L\alpha$. Wegen der Lipschitz-Bedingung von f bezüglich der x-Variable gilt für beliebige w, $\tilde{w} \in X$

$$\begin{aligned} |T(w)(t) - T(\tilde{w})(t)| &= \Big| \int_{t_0}^{t} \big[f(s, w(s)) - f(s, \tilde{w}(s)) \big]\, ds \Big| \\ &\leq L \Big| \int_{t_0}^{t} |w(s) - \tilde{w}(s)|\, ds \Big| \leq L|t - t_0| \|w - \tilde{w}\|_{C^0([t_0-\alpha, t_0+\alpha])} \end{aligned}$$

für $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, also folgt

$$\|T(w) - T(\tilde{w})\|_{C^0([t_0-\alpha, t_0+\alpha])} \leq L\alpha \|w - \tilde{w}\|_{C^0([t_0-\alpha, t_0+\alpha])}$$

Schritt 3: T^{n_0} ist eine strikte Kontraktion auf X für ein geeignetes $n_0 \in \mathbb{N}$. Im letzten Schritt haben wir gezeigt, dass T nach gegebenenfalls einer weiteren Einschränkung von α, so dass $L\alpha < 1$ gilt, eine strikte Kontraktion auf X ist. Diese zusätzliche Einschränkung von α ist tatsächlich unnötig, wenn man anstelle von T eine geeignete höhere Picard-Iterierte T^{n_0} betrachtet. Dazu überlegen wir uns mithilfe von Schritt 1 und Schritt 2 zunächst

$$\begin{aligned} |T^2(w)(t) - T^2(\tilde{w})(t)| &= \Big| \int_{t_0}^{t} \big[f(s, T(w)(s)) - f(s, T(\tilde{w})(s)) \big]\, ds \Big| \\ &\leq L \Big| \int_{t_0}^{t} |T(w)(s) - T(\tilde{w})(s)|\, ds \Big| \\ &\leq L^2 \Big| \int_{t_0}^{t} |s - t_0|\, ds \Big| \|w - \tilde{w}\|_{C^0([t_0-\alpha, t_0+\alpha])} \\ &\leq \frac{1}{2} L^2 |t - t_0|^2 \|w - \tilde{w}\|_{C^0([t_0-\alpha, t_0+\alpha])} \end{aligned}$$

und dann induktiv für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|T^n(w)(t) - T^n(\tilde{w})(t)| \leq \frac{1}{n!} L^n |t - t_0|^n \|w - \tilde{w}\|_{C^0([t_0-\alpha, t_0+\alpha])}$$

für $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Damit haben wir

$$\|T^n(w) - T^n(\tilde{w})\|_{C^0([t_0-\alpha, t_0+\alpha])} \leq \frac{1}{n!} L^n \alpha^n \|w - \tilde{w}\|_{C^0([t_0-\alpha, t_0+\alpha])} \tag{3.7}$$

gezeigt. Da Fakultäten schneller als Potenzen wachsen, finden wir einen (von der Lipschitz-Konstante L abhängigen) Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\alpha^{n_0} L^{n_0} < n_0!\,,$$

und folglich ist T^{n_0} eine strikte Kontraktion auf X.

Schritt 4: Abschluss des Beweises. Der Banachsche Fixpunktsatzes 3.14 zeigt nun, dass für die Abbildung T^{n_0} ein eindeutiger Fixpunkt $u \in X = C^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \overline{B}_b(x_0))$ existiert. Zu beachten ist nun noch:

- u ist auch ein Fixpunkt von T: dazu bemerken wir zunächst, dass $T(u)$ ebenfalls ein Fixpunkt von T^{n_0} ist, denn es gilt
$$T^{n_0}\big(T(u)\big) = T\big(T^{n_0}(u)\big) = T(u)\,.$$
Da aber u der einzige Fixpunkt von T^{n_0} ist, muss $T(u) = u$ gelten, d.h. u muss ein Fixpunkt von T sein.

- u ist der einzige Fixpunkt von T: jeder Fixpunkt von T ist auch ein Fixpunkt von T^{n_0}. Da es aber nur einen einzigen Fixpunkt von T^{n_0} gibt, kann es außer u keinen weiteren Fixpunkt von T geben.

Insgesamt ist u der einzige Fixpunkt von T, und da Lösungen des Anfangswertproblems genau die Fixpunkte von T sind, haben wir damit die Existenz einer eindeutigen Lösung des Anfangswertproblems auf dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ gezeigt. □

Bemerkung 3.17. *Ist $u_0 \in C^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \overline{B}_b(x_0))$ (etwa $u_0 \equiv x_0$) der Startwert der Picard-Iteration, so haben wir mit* (3.7) *insbesondere die* a priori Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned}
\|u - T^n(u_0)\|_{C^0([t_0-\alpha,t_0+\alpha])} &= \|T^n(u) - T^n(u_0)\|_{C^0([t_0-\alpha,t_0+\alpha])} \\
&\le \frac{1}{n!} L^n \alpha^n \|u - u_0\|_{C^0([t_0-\alpha,t_0+\alpha])} \\
&\le \frac{1}{n!} L^n \alpha^n \big(b + \|x_0 - u_0\|_{C^0([t_0-\alpha,t_0+\alpha])}\big)
\end{aligned}$$

für die Picard-Iterierten $T^n(u_0)$ für $n \in \mathbb{N}$ gezeigt.

Wie beim Satz von Peano gibt es auch eine qualitative Version des Satzes 3.15 von Picard–Lindelöf, die die eindeutige lokale Lösbarkeit jeden Anfangswertproblems $u' = f(t, u)$ mit $u(t_0) = x_0$ besagt, falls die Strukturfunktion f in einer Umgebung des Anfangsdatums (t_0, x_0) stetig sowie bezüglich der x-Variable (lokal) Lipschitz-stetig ist.

Korollar 3.18 (von Picard–Lindelöf, qualitative Version)**.** *Seien $N \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^{1+N}$ offen und $(t_0, x_0) \in D$. Zum Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} u' &= f(t, u) \\ u(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

mit stetiger Strukturfunktion $f\colon D \to \mathbb{R}^N$, die Lipschitz-stetig bezüglich der x-Variable ist, gibt es eine eindeutige lokale Lösung*, d.h. es gibt ein $\alpha > 0$ mit der Eigenschaft, dass das Anfangswertproblem auf dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ eine eindeutige Lösung besitzt.*

Beweis. Wie beim Beweises des Korollars 3.11 zum Satz von Peano bestimmt man positive Zahlen a, $b > 0$ (in Abhängigkeit von (t_0, x_0) und D), so dass $[t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_b(x_0) \subset D$ gilt. Dann schränkt man die Strukturfunktion auf diese Zylindermenge ein und wendet Satz 3.15 auf das zugehörige Anfangswertproblem an. Die so gewonnene eindeutige Lösung ist dann auch eine eindeutige Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems. □

Bemerkungen 3.19.

(i) *Der Satz von Picard–Lindelöf garantiert sogar die Eindeutigkeit von Lösungen des Anfangswertproblems auf dem ganzen Existenzintervall.*

(ii) *Für explizite gewöhnliche Differentialgleichungen der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ bekommt man die Existenz einer eindeutigen lokalen Lösung über die Reduktion der Ordnung und muss daher (lokale) Lipschitz-Stetigkeit bezüglich aller abhängiger Variablen $(u, u', \dots, u^{(k-1)})$ voraussetzen.*

Beweis von Bemerkung 3.19 (i). Angenommen, es gibt zwei Lösungen u_1 und u_2 auf einem Intervall $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ für ein $\beta > 0$. Dann ist die Menge

$$I_0 := \left\{ t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta] \colon u_1(t) = u_2(t) \right\}$$

relativ offen (wegen Picard–Lindelöf lokal angewandt) und abgeschlossen (als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Funktion). Da I_0 wegen $u_1(t_0) = u_2(t_0)$ nichtleer ist, muss also $I_0 = [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ und damit $u_1 \equiv u_2$ auf $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ gelten. □

Der Satz von Picard–Lindelöf liefern lediglich die Existenz und Eindeutigkeit einer lokalen Lösung, daher stellt sich die Frage, auf welche (größeren) Intervalle sich diese Lösung maximal fortsetzen lässt (zu beachten ist hier, dass die Schranke b/M in der quantitativen Version in Satz 3.15 lediglich ein worst-case Szenario war). Die intuitive Idee ist das Prinzip der Lösungsfortsetzung, d.h. wir nehmen den Endwert der lokalen Lösung als neuen Anfangswert, um so eine Lösung auf einem größeren Intervall zu erhalten (zu beachten ist hier, dass das Zusammensetzen von Lösungen nach Satz 1.9 möglich ist).

Satz 3.20 (über die maximale Lösung)**.** *Seien $N \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^{1+N}$ offen, $f \colon D \to \mathbb{R}^N$ stetig und Lipschitz-stetig bezüglich der x-Variable. Zu allen Anfangsbedingungen $(t_0, x_0) \in D$ gibt es ein eindeutiges, offenes Intervall $I_{\max} \subset \mathbb{R}$, das t_0 enthält und die folgenden Eigenschaften besitzt:*

(i) *Das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} u' &= f(t, u) \\ u(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{3.8}$$

besitzt auf $I_{\max}$ eine eindeutige Lösung u;

(ii) *Ist $\tilde{u} \colon \tilde{I} \to \mathbb{R}^N$ eine weitere Lösung des Anfangswertproblems für ein Intervall $\tilde{I}$ mit $t_0 \in \tilde{I}$, so gilt $\tilde{I} \subset I_{\max}$ und $\tilde{u}$ stimmt mit der Einschränkung $u|_{\tilde{I}}$ von u auf $\tilde{I}$ überein.*

Das Intervall $I_{\max}$ bezeichnet man als das maximale Existenz- *oder* Lösungsintervall *und die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems auf $I_{\max}$ auch als die* maximale Lösung.

Beweis. Wir definieren $I_{\max}$ als die Vereinigung aller Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$, auf denen eine Lösung des Anfangswertproblems (3.8) existiert, also als das Intervall mit unterer Intervallgrenze I_- und oberer Intervallgrenze I^+, mit

$$\begin{aligned} I^+ &:= \sup \left\{ T \in \mathbb{R} \colon \text{das Anfangswertproblem (3.8) ist auf } [t_0, T] \text{ lösbar} \right\}, \\ I^- &:= \inf \left\{ S \in \mathbb{R} \colon \text{das Anfangswertproblem (3.8) ist auf } [S, t_0] \text{ lösbar} \right\}. \end{aligned}$$

Da nach Korollar (3.18) ein Existenzintervall positiver Länge um t_0 existiert, gilt $-\infty \leq I^- < t_0 < I^+ \leq \infty$, also insbesondere $t_0 \in I_{\max}$. Mit der Bemerkung 3.19 (i) zur Eindeutigkeit von Lösungen und Satz 1.9 zum Aneinandersetzen von Lösungen können wir nun auch die eindeutige maximale Lösung definieren, und zwar als

$$u(t) := u_{I(t)}(t) \qquad \text{für jedes } t \in I_{\max},$$

wobei $u_{I(t)}$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (3.8) auf einem Intervall $I(t)$ mit $t_0, t \in I(t)$ bezeichnet. Wir zeigen nun, dass $I_{\max}$ offen ist, also

$$I_{\max} = (I^-, I^+)$$

gilt und die Intervallgrenzen demnach ausgeschlossen sind. Wäre etwa I^+ endlich und in $I_{\max}$ enthalten, so hätte man $(I^+, u((I^+)) \in D$ und könnte u wegen der Offenheit von D über I^+ hinaus fortsetzen, was der Maximalität von I^+ widerspricht. Also gilt $I^+ \notin I_{\max}$, und analog argumentiert man, dass auch $I^- \notin I_{\max}$ gilt. Da die Eigenschaft (ii) durch die Konstruktion sichergestellt ist, ist der Satz bewiesen. □

Das maximale Existenzintervall kann grundsätzlich endlich oder unendlich in jeder Richtung sein, und daher überlegen wir uns als nächstes, was im Limes beim Erreichen der Grenzen des maximalen Existenzintervalls passiert. In jedem Fall muss jede kompakte Teilmenge von D verlassen werden:

Satz 3.21 (über das Randverhalten maximaler Lösungen)**.** *Seien $N \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^{1+N}$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}^N$ stetig und Lipschitz-stetig bezüglich der x-Variable. Ist $(t_0, x_0) \in D$ und u eine maximale Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} u' &= f(t,u) \\ u(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

auf dem maximalen Existenzintervall $I_{\max} = (I^-, I^+)$, so gelten die folgenden Aussagen:

(i) *Ist $K \subset D$ eine kompakte Menge mit $(t_0, x_0) \in K$, so gibt es ein kompaktes Intervall $[T_K^-, T_K^+] \subset (I^-, I^+)$ mit*

$$(t, u(t)) \notin K \qquad \text{für alle } t \in (I^-, I^+) \setminus [T_K^-, T_K^+]$$

(endgültiges Verlassen jeden kompakten Intervalls).

(ii) *Ist I^+ endlich, so ist u auf $[t_0, I^+)$ unbeschränkt oder der Rand ∂D von D ist nichtleer und es gilt*

$$\lim_{t \nearrow I^+} \operatorname{dist}\big((t, u(t)), \partial D\big) = 0\,.$$

Die entsprechend angepasste Aussage gilt auch für I^-. In diesem Fall bezeichnet man I^+ bzw. I^- als eine endliche Entweichzeit *der maximalen Lösung.*

Beweis. Schritt 1: zur Vorbereitung zeigen wir, dass für jede Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $I_{\max}$ mit

$$(t_k, u(t_k)) \to (I^*, x^*) \quad \text{bei } k \to \infty \text{ mit } I^* \in \{I^-, I^+\}$$

der Grenzwert $(I^*, x^*) \in \partial D$ erfüllt. Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann müsste (I^*, x^*) als Häufungspunkt von Punkten aus D in D selbst liegen. Dann könnte man allerdings die maximale Lösung über I^* hinaus fortsetzen, was im Widerspruch zur Maximalität des Existenzintervalls (I^-, I^+) steht.

Schritt 2: Beweise der Aussage (i). Wir fixieren eine kompakte Menge $K \subset D$ mit $(t_0, x_0) \in K$ und nehmen zunächst an, dass kein Zeitpunkt $T_K^+ \in (I^-, I^+)$ existiert, so dass $(t, u(t)) \notin K$ für alle Zeiten $t \in (T_K^+, I^+)$ gilt. Dann gäbe es eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $I_{\max}$ mit $t_k \nearrow I^+$ bei $k \to \infty$ und $(t_k, u(t_k)) \in K$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wegen der Kompaktheit von K müsste in diesem Fall nun einerseits $I^+ < \infty$ gelten, und andererseits würde eine Teilfolge von $(t_k, u(t_k))_{k\in\mathbb{N}}$ gegen ein $(I^+, x^*) \in K$ konvergieren. Nach Schritt 1 müsste aber auch $(I^+, x^*) \in \partial D$ gelten, was ein Widerspruch dazu ist, dass K kompakt in D enthalten ist und damit $\operatorname{dist}(K, \partial D) > 0$ gilt. Daher haben wir die Existenz von $T_K^+ \in (I^-, I^+)$ mit $(t, u(t)) \notin K$ für alle $t \in (T_K^+, I^+)$ gezeigt, und die Existenz von $T_K^- \in (I^-, I^+)$ mit $(t, u(t)) \notin K$ für alle $t \in (I^-, T_K^-)$ folgt analog.

Schritt 3: Beweise der Aussage (ii). Wir führen nun den Beweis für die Aussage für I^+ (und der Beweis für die entsprechende Aussage für I^- geht vollkommen analog). Falls u auf $[t_0, I^+)$ unbeschränkt ist, so ist nichts zu zeigen, und wir dürfen daher annehmen, dass u auf $[t_0, I^+)$ beschränkt ist. Wir wählen nun eine *beliebige* Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $t_k \nearrow I^+$ bei $k \to \infty$, und wegen der Beschränktheit von u können wir eine Teilfolge wählen, so dass $(t_k, u(t_k))$ konvergiert, und zwar nach Schritt 1 gegen einen Randpunkt in $(I^+, x^*) \in \partial D$ (und ∂D ist damit insbesondere nicht leer). Es gilt also

$$(t_{k(\ell)}, u(t_{k(\ell)})) \to (I^+, x^*) \quad \text{und damit} \quad \operatorname{dist}\big((t_{k(\ell)}, u(t_{k(\ell)})), \partial D\big) \to 0$$

für eine Teilfolge, wir müssen aber $\operatorname{dist}((t_k, u(t_k)), \partial D) \to 0$ bei $k \to \infty$ für die ganze Folge zeigen. Würde diese Konvergenz nicht für die ganze Folge gelten, so fänden wir eine Teilfolge $(t_{k(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ mit

$$\operatorname{dist}\big((t_{k(j)}, u(t_{k(j)})), \partial D\big) \geq \delta \quad \text{für ein } \delta > 0 \text{ und alle } j \in \mathbb{N}\,.$$

Mit dem obigen Argument angewandt auf diese Teilfolge $(t_{k(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ ergibt sich sofort ein Widersprich zu $\delta > 0$, und damit ist auch die zweite Aussage bewiesen. $\square$

Beispiele 3.22. *Wir geben nun einfache Beispiele für verschiedenes Randverhalten von Lösungen zu Anfangswertproblemen an.*

(i) *Wir betrachten das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} u' &= u^2 t \\ u(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

für beliebiges $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$. *Die Strukturfunktion* $f(t,x) := x^2 t$ *ist auf* $\mathbb{R}^2$ *lokal Lipschitz-stetig bezüglich der* x*-Variable, also können wir mit Korollar* 3.18 *von Picard–Lindelöf auf die Existenz einer lokalen eindeutigen Lösung schließen (und diese anschließend mit Satz* 3.20 *zur maximalen Lösung auf dem maximalen Existenzintervall fortsetzen). Tatsächlich können wir das Anfangswertproblem für* $u \neq 0$ *mit Separation der Variablen lösen:*

$$\int_{x_0}^{u(t)} \frac{1}{u^2}\, du = \int_{t_0}^{t} \frac{u'(s)}{u^2(s)}\, ds = \int_{t_0}^{t} s\, ds$$

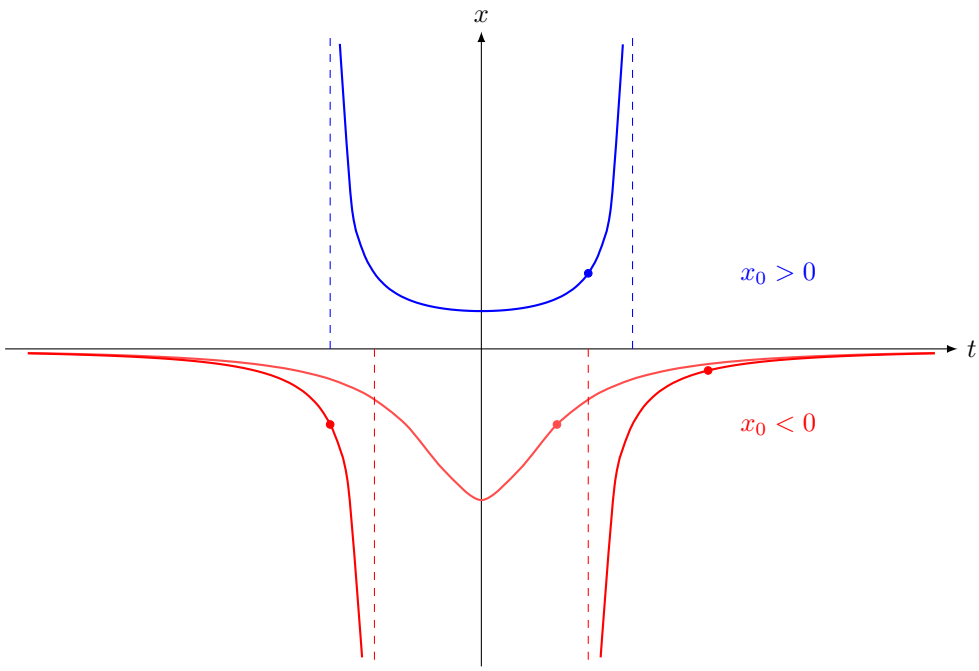
also

$$u(t) = \frac{2x_0}{2 + (t_0^2 - t^2)x_0}$$

für alle Zeiten t *mit* $2 + (t_0^2 - t^2)x_0 > 0$. *Für die Länge der Existenzintervalle sind nun drei Fälle zu unterscheiden, in Abhängigkeit vom Anfangsdatum* $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$*:*

- *Für* $x_0 > 0$ *und* $t_0 \in \mathbb{R}$ *beliebig ist das maximale Existenzintervall*
$$I_{\max}(t_0, x_0) = \big(-(t_0^2 - 2/x_0)^{1/2}, (t_0^2 + 2/x_0)^{1/2} \big)\,.$$
- *Für* $x_0 \leq 0$ *und* $t_0 \in \mathbb{R}$ *mit* $2 + t_0^2 x_0 > 0$ *ist das maximale Existenzintervall* $I_{\max}(t_0, x_0) = \mathbb{R}$.
- *Für* $x_0 \leq 0$ *und* $t_0 \in \mathbb{R}$ *mit* $2 + t_0^2 x_0 \leq 0$ *ist das maximale Existenzintervall für negative bzw. positive* t_0 *gegeben durch*
$$I_{\max}(t_0, x_0) = \big(-\infty, -(t_0^2 + 2/x_0)^{1/2} \big) \quad \text{bzw.} \quad I_{\max}(t_0, x_0) = \big((t_0^2 + 2/x_0)^{1/2}, \infty \big)\,.$$

Da $D = \mathbb{R}^2$ *und damit* $\partial D = \emptyset$ *gilt, muss für bei endlichen Grenzen des maximalen Existenzintervalls die Lösung nahe dieser Grenze unbeschränkt werden, und damit liegt eine Explosion der Lösung in endlicher Zeit vor.*



(ii) *Wir betrachten das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} u' &= t^{-1} \\ u(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ *und* $t_0 > 0$. *Die Strukturfunktion* $f(t,x) := t^{-1}$ *ist auf der offenen* $D := \{(t,x) \colon t > 0\}$ *unabhängig von* x *und damit (global) Lipschitz-stetig bezüglich der* x*-Variable, und daher existiert mit Picard–Lindelöf wieder eine eindeutige maximale Lösung. Mit Separation der Variablen zeigt man*

$$u(t) = \log(t) - \log(t_0) + x_0$$

für alle t *im maximalen Existenzintervall* $I_{\max} = (0,\infty)$. *Der Rand* $\partial D = \{0\} \times \mathbb{R}$ *ist diesmal nicht-leer, jedoch sieht man anhand der expliziten Darstellung der Lösung sofort* $|u(t)| = \infty$ *bei* $t \searrow 0$ *und kann auch den Abstand zum Rand bestimmen als*

$$\operatorname{dist}\big((t,u(t)), \partial D\big) := \inf_{x \in \mathbb{R}} \big\{(t, \log(t) - \log(t_0) + x_0) - (0,x)\big\} = |t|$$

(die letzte Gleichheit gilt mit der Wahl $x = \log(t) - \log(t_0) + x_0$*).*

(iii) *Wir betrachten das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} u' &= -t^{-2}\cos(t^{-1}) \\ u(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ *und* $t_0 > 0$. *Da die Strukturfunkion* $f(t,x) := -t^{-2}\cos(t^{-1})$ *wieder Lipschitz-stetig auf* $D := \{(t,x) \colon t > 0\}$ *ist, finden wir eine eindeutige maximale Lösung. Mit Separation der Variablen berechnet man diese als*

$$u(t) = \sin(t^{-1}) - \sin(t_0^{-1}) + x_0$$

mit maximalem Existenzintervall $I_{\max} = (0,\infty)$. *Der Grenzwert* $(t,u(t))$ *bei* $t \searrow 0$ *existiert nicht (tatsächlich gibt es für jedes* $x \in [-1,1]$ *eine Nullfolge* $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$*, so dass* $(t_k, u(t_k)) \to (0,x) \in \partial D$ *bei* $k \to \infty$ *gilt), die Lösung bleibt jedoch beschränkt und man verifiziert genau wie im letzten Beispiel*

$$\operatorname{dist}\big((t,u(t)), \partial D\big) = \operatorname{dist}\big((t,u(t)), \{0\} \times \mathbb{R}\big) = |t| \to 0 \quad \textit{bei } t \searrow 0\,.$$

Wir wollen uns schließlich noch überlegen, wie man eine *globale* Lösung finden kann, also eine Lösung, die auf einem fest vorgegebenen Zeitintervall $I \subset \mathbb{R}$ existiert. Als direkte Folgerung von Satz 3.21 bemerken wir zunächst:

Korollar 3.23. *Seien* $N \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ *ein offenes Intervall,* $D' \subset \mathbb{R}^N$ *eine offene Menge,* $(t_0, x_0) \in I \times D'$, $f \colon I \times D' \to \mathbb{R}^N$ *stetig und Lipschitz-stetig bezüglich der* x*-Variable. Das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} u' &= f(t,u) \\ u(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

ist auf ganz I *lösbar, falls eine kompakte Menge* $K' \subset D'$ *existiert, so dass die maximale Lösung des Anfangswertproblems komplett in* K *verläuft, also falls der Abschluss der Menge* $\{u(t) \colon t \in I_{\max}\}$ *kompakt in* D' *liegt. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die maximale Lösung periodisch ist, d.h. wenn eine Periode* $p \in (0, I^+ - I^-)$ *existiert, so dass*

$$u(t) = u(t+p) \quad \textit{für alle } t, t+p \in I_{\max} \textit{ gilt}.$$

Beweis. Die erste Aussage des Korollars folgt direkt aus Satz 3.21 (i), da in dieser Situation kompakte Mengen $K \subset I \times D'$ nur in "Zeitrichtung" verlassen werden können. Ferner bleiben die Werte periodischer Lösungen u immer in der kompakten Menge $\{u(t) \colon t \in I_p(t_0)\} \subset D'$, wobei $I_p(t_0)$ ein ganz in $I_{\max}$ liegendes, abgeschlossenes Intervall der Länge p ist. □

Insbesondere kann man auch die Existenz (und Eindeutigkeit) globaler Lösungen für gewöhnliche Differentialgleichungen zeigen, die eine lineare Wachstumsbedingung erfüllen. Um den maximalen Wertebereich der Lösungen zu kontrollieren, zeigen wir zunächst ein Lemma, das auf der Gronwallschen Ungleichung (Beweis in den Übungen) basiert.

Lemma 3.24 (von Gronwall)**.** *Seien $a < b$ und $w \in C([a,b])$ eine Funktion, die für Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta > 0$ der Integralungleichung*

$$w(t) \leq \alpha + \beta \int_a^t w(s)\, ds \qquad \text{für alle } t \in [a,b]$$

genügt. Dann gilt die Abschätzung

$$w(t) \leq \alpha \exp\big(\beta(t-a)\big) \qquad \text{für alle } t \in [a,b]\,.$$

Lemma 3.25. *Seien $N \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^{1+N}$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}^N$ eine stetige Funktion, die die* lineare Wachstumsbedingung

$$|f(t,x)| \leq L_1\big(|x| + L_2\big)$$

für alle $(t,x) \in D$ mit positiven Konstanten L_1, L_2 erfüllt. Ist $u\colon I \to \mathbb{R}^N$ (mit $I \subset \mathbb{R}$ einem Intervall) eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u' &= f(t,u) \\ u(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

mit $(t_0, x_0) \in D$, so gilt für alle $t \in I$ die Abschätzung

$$|u(t)| \leq (|x_0| + L_2) \exp\big(L_1|t-t_0|\big) - L_2\,.$$

Beweis. Wir betrachten nur $t \in I$ mit $t \geq t_0$ (der Beweis für den Fall $t < t_0$ geht vollkommen analog). Mithilfe der Integralversion des Anfangswertproblems aus Satz 1.20 in Kombination mit der linearen Wachstumsbedingung sehen wir zunächst

$$|u(t)| \leq |x_0| + \int_{t_0}^t |f(s,u(s))|\, ds \leq |x_0| + \int_{t_0}^t L_1\big(|u(s)| + L_2\big)\, ds\,.$$

Nun wenden wir das Lemma 3.24 von Gronwall auf die stetige Funktion $w(t) := |u(t)| + L_2$ und mit Konstanten $\alpha := |x_0| + L_2$ und $\beta := L_1$ an. Es folgt

$$|u(t)| + L_2 \leq (|x_0| + L_2) \exp\big(L_1(t-t_0)\big)$$

für alle $t \in I$ mit $t \geq t_0$, also die Behauptung des Lemmas. □

Korollar 3.26 (globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz unter einer linearen Wachstumsbedingung)**.** *Seien $N \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f\colon I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ stetig und Lipschitz-stetig bezüglich der x-Variable, mit*

$$|f(t,x)| \leq L_1(t)\big(|x| + L_2(t)\big) \qquad \text{für alle } t \in I \text{ und } x \in \mathbb{R}^N$$

mit stetigen Funktionen $L_1, L_2\colon I \to \mathbb{R}_0^+$. Dann ist die eindeutige maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u' &= f(t,u) \\ u(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

für jedes $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^N$ auf ganz I definiert, d.h. es gilt $I_{\max} = I$.

Beweis. Sei $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^N$ beliebig vorgegeben. Wir nehmen an, das die maximale Lösung u des zugehörigen Anfangswertproblems auf einem maximalen Existenzintervall mit $I_{\max} = (I^-, I^+) \subsetneq I$ existieren würde, also dass $I^- > \inf I$ oder $I^+ < \sup I$ gelten würde. Wegen $D = I \times \mathbb{R}^N$ und damit $\partial D = \{\inf I, \sup I\} \times \mathbb{R}^N$ müsste nach Satz 3.21 (ii) dann I^- bzw. I^+ eine endliche Entweichzeit der maximalen Lösung sein (die Lösung dort also explodieren), was jedoch im Widerspruch zur Aussage von Lemma 3.25 steht. Demzufolge gilt $I_{\max} = I$ wie behauptet. □

Bemerkung 3.27. *Insbesondere ist nun gezeigt, dass für jedes lineare System von gewöhnlichen Differentialgleichungen der Form*

$$u' = A(t)u + b(t)$$

mit stetigen Koeffizienten $A\colon I \to \mathbb{R}^{N\times N}$ und stetiger Inhomogenität $b\colon I \to \mathbb{R}^N$ (für $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $N \in \mathbb{N}$) das zugehörige Anfangswertproblem mit Anfangsbedingung $u(t_0) = x_0$ für beliebiges $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^N$ eine eindeutige maximale Lösung auf dem ganzen Intervall I besitzt.

Exkurs zu Maximallösungen und Minimallösungen. Alle Aussagen zu maximalen Lösungen und der Länge des maximalen Existenzintervalles wurden unter der Voraussetzung der Stetigkeit der Strukturfunktion sowie ihrer Lipschitz-Stetigkeit bezüglich der abhängigen Variable getroffen. In der Praxis treten jedoch auch lediglich stetige Strukturfunktionen auf, für die wir einerseits mit dem Satz 3.9 von Peano eine Aussage zur Existenz einer lokalen Lösung hergeleitet haben, für die wir andererseits aber auch ein Beispiel kennengelernt haben, bei dem nicht einmal die lokale Eindeutigkeit von Lösungen galt. Prinzipiell kann man auch in diesem Fall Lösungen fortsetzen, und es gibt im skalaren Fall tatsächlich sogar die Möglichkeit, spezielle Lösungen in eindeutiger Weise zu selektieren.

Definition 3.28. *Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig und $(t_0, x_0) \in D$. Für das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} u' &= f(t,u) \\ u(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

heißt u^* eine Maximallösung *bzw. u_* eine* Minimallösung*, falls u^* bzw. u_* das Anfangswertproblem auf einem offenen, t_0 enthaltenden Intervall I^* bzw. I_* löst, bei jeder endlichen Intervallgrenze unbeschränkt wird oder*

$$\operatorname{dist}\big((t, u^*(t)), \partial D\big) \to 0 \quad \textit{bzw.} \quad \operatorname{dist}\big((t, u_*(t)), \partial D\big) \to 0$$

bei $t \nearrow \sup I^*$ oder $t \searrow \inf I^*$ bzw. bei $t \nearrow \sup I_*$ oder $t \searrow \inf I_*$ erfüllt, und für jede andere Lösung $u\colon I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems die Vergleichseigenschaft

$$u(t) \le u^*(t) \quad \textit{bzw.} \quad u(t) \ge u_*(t)$$

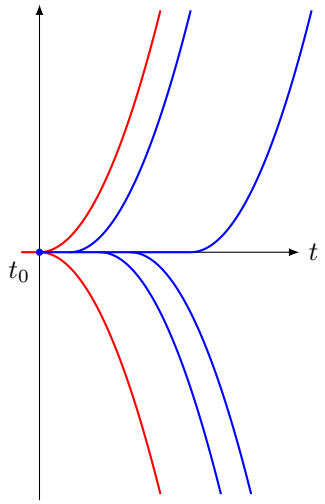
für jedes $t \in I^* \cap I$ bzw. $t \in I_* \cap I$ gilt.

Bemerkungen 3.29.

(i) *Die Eindeutigkeit der Maximal- und Minimallösung für jedes Anfangswertproblem ist bereits durch die Definition gesichert.*

(ii) *Auch für stetige Strukturfunktionen können Anfangswertprobleme eindeutig gelöst werden. Dies ist wegen der Vergleichseigenschaft offensichtlich genau dann der Fall, wenn $u^* = u_*$ gilt.*

(iii) *Ist das Anfangswertproblem dagegen nicht eindeutig lösbar, so begrenzen Maximal- und Minimallösungen alle anderen Lösungen von oben und unten auf dem gemeinsamen Definitionsbereich. Für $D = I \times \mathbb{R}$ gilt sogar, dass jeder Punkt zwischen Maximal- und Minimallösung von einer anderen Lösung getroffen wird.*



Tatsächlich kann man auch die Existenz einer Maximal- und Minimallösung für jedes Anfangswertproblem (lediglich unter der Voraussetzung der Stetigkeit an die Strukturfunktion) zeigen. Eine Konstruktion ist über das bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen grundsätzlich sehr nützliche Verfahren mittels Super- und Sublösungen möglich.

Definition 3.30. *Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig und $(t_0, x_0) \in D$. Eine stetig differenzierbare Funktion $v\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ heißt* strikte Superlösung *des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} u' &= f(t,u) \\ u(t_0) &= x_0\,, \end{cases} \tag{3.9}$$

falls $(t, v(t)) \in D$ für alle $t \in I$ gilt, $t_0 \in I$ mit $v(t_0) \geq x_0$ gilt, und die strikten Ungleichungen

$$v'(t) > f(t, v(t)) \text{ für } t \in I \text{ mit } t > t_0 \quad \text{und} \quad v'(t) < f(t, v(t)) \text{ für } t \in I \text{ mit } t < t_0$$

erfüllt sind. Mit entsprechend vertauschten Ungleichheitszeichen definiert man $w\colon I \to \mathbb{R}$ als strikte Sublösung *des Anfangswertproblems* (3.9).

Der Name Sub- und Superlösung ist dadurch motiviert, dass jede Superlösung eine obere und jede Sublösung eine untere Schranke für Lösungen des Anfangswertproblems (auf dem gemeinsamen Definitionsbereich) darstellen.

Lemma 3.31. *Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig und $(t_0, x_0) \in D$. Sind $u \in C^1(I, \mathbb{R})$ eine Lösung, $v \in C^1(I, \mathbb{R})$ eine strikte Superlösung und $w \in C^1(I, \mathbb{R})$ eine strikte Sublösung des Anfangswertproblems* (3.9)*, so gilt*

$$w(t) < u(t) < v(t) \quad \text{für alle } t \in I \setminus \{t_0\}\,.$$

Mit diesem Lemma können wir nun die Idee des Beweises der Existenz der Maximal- und Minimallösung erklären (für Details siehe [6, §9]. Mit dem Satz 3.9 von Peano erhält man eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von strikten Superlösungen des Anfangswertproblems, wobei v_n für $n \in \mathbb{N}$ als (beliebige) Lösung des approximativen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} v' &= f(t,v) + n^{-1}(t - t_0) \\ v(t_0) &= x_0 + n^{-1} \end{cases}$$

auf einem von n unabhängigen Existenzintervall definiert ist. Mit n^{-1} im approximativen Anfangswertproblem ersetzt durch $-n^{-1}$ erhält man entsprechend auch eine Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von (beliebigen) strikten Sublösungen des ursprünglichen Anfangswertproblems. Tatsächlich kann man wegen der Konstruktion zeigen, dass es sich hierbei um monotone Folgen handelt, also $v_{n+1} \leq v_n$ und $w_{n+1} \geq w_n$ für $n \in \mathbb{N}$ gelten. Wegen dieser Monotonie können wir u^* bzw. u_* als punktweise Grenzwerte

$$u^*(t) \coloneqq \lim_{n\to\infty} v_n(t) \quad \text{und} \quad u_*(t) \coloneqq \lim_{n\to\infty} w_n(t)$$

definieren, und mit dem Satz 3.6 von Arzelà–Ascoli kann man (ohne Einschränkung für die ganze Folge) sogar gleichmäßige Konvergenz zeigen. Es handelt sich tatsächlich um Lösungen, denn es gilt

$$u^*(t) = \lim_{n\to\infty} v_n(t) = \lim_{n\to\infty} \Big(x_0 + n^{-1} \int_{t_0}^{t} \big[f(s, v_n(s)) + n^{-1}(s - t_0) \big]\, ds \Big) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u^*(s))\, ds$$

(und entsprechend für u_*). Auch gilt für jede Lösung u des Anfangswertproblems die Vergleichseigenschaft $w_n \leq u \leq v_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wegen der Super- und Sublösungseigenschaft von v_n bzw. w_n, und diese überträgt sich im Limes auf u^* und u_*. Wie im Fall Lipschitz-stetiger Strukturfunktionen kann u^* bzw. u_* fortgesetzt werden (u^* etwa durch den monotonen Grenzwert einer Folgen von Superlösungen, die den Endwert von u^* als neuen Startwert hat, oder, wie zuvor, indem wir das Intervall I^* als Vereinigung über alle, t_0 enthaltenen Intervalle definieren, auf denen eine solche Lösung u^* mit den bisher gezeigten Eigenschaften existiert). Für das Verhalten an den Intervallgrenzen von I^* bzw. I_* muss man letztendlich ähnlich wie im Satz 3.21 argumentieren und hat so insgesamt die Existenz der Maximal- und Minimallösung zum gegebenen Anfangswertproblem gezeigt.

3.4 Abhängigkeit der Lösung von den Daten

Abschließend untersuchen wir, wie sich Störungen der Daten (im Sinne der Anfangswerte oder der Strukturfunktion) auf die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems auswirken. Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier weiterhin auf stetige Strukturfunktionen, die Lipschitz-stetig in der abhängigen Variable sind, so dass wir mit eindeutigen Lösungen arbeiten können (und nicht auf die Konzepte von Maximal- und Minimallösung zurückgreifen müssen). Mit dem Ziel, gewöhnliche Differentialgleichungen effektiv für die Beschreibung und Vorhersage von (Natur-)Phänomenen auf endlichen Zeitintervallen nutzen zu können, sind wir hier an Aussagen interessiert, die besagen, dass kleine Störungen die zugehörigen Lösungen nur wenig (und zwar stetig oder sogar differenzierbar) beeinflussen.

Lemma 3.32 (Abschätzungslemma)**.** *Seien $N \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^{1+N}$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}^N$ eine stetige Funktion, die Lipschitz-stetig bezüglich der x-Variable ist mit*

$$|f(t,x) - f(t,\tilde{x})| \leq L|x - \tilde{x}|$$

für alle $(t,x),(t,\tilde{x}) \in D$ mit einer Konstante $L > 0$. Ist $u \in C^1(I,\mathbb{R}^N)$ für ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u' &= f(t,u) \\ u(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

und ist $\tilde{u} \in C^1(I,\mathbb{R}^N)$ eine Näherungslösung mit $(t,\tilde{u}(t)) \in D$ für alle $t \in I$ und mit

- Defekt der Gleichung $|\tilde{u}'(t) - f(t,\tilde{u}(t))| \leq d_G$ *für alle $t \in I$,*
- Defekt der Anfangszeit $|t_0 - \tilde{t}_0| \leq d_T$,
- Defekt des Anfangswerts $|x_0 - \tilde{u}(\tilde{t}_0)| \leq d_A$,

so gilt für alle $t \in I$ die Abschätzung

$$|u(t) - \tilde{u}(t)| \leq \Big[d_A + d_T\big(d_G + \sup_{s\in I}|f(s,\tilde{u}(s)| + \frac{d_G}{L}\big)\Big] \exp\big(L|t-t_0|\big) - \frac{d_G}{L}\,.$$

Beweis. Wir schätzen den Abstand zwischen der echten Lösung u und der Näherungslösung $\tilde{u}$ zunächst bei $t = t_0$ ab. Mithilfe der oberen Schranken d_A, d_T, d_G für die Defekte des Anfangswerts, der Anfangszeit und der Gleichung sehen wir

$$\begin{aligned} |u(t_0) - \tilde{u}(t_0)| &= \Big|x_0 - \int_{\tilde{t}_0}^{t_0} \tilde{u}'(s)\,ds - \tilde{u}(\tilde{t}_0)\Big| \\ &\leq |x_0 - \tilde{u}(\tilde{t}_0)| + \Big|\int_{\tilde{t}_0}^{t_0} \big[\tilde{u}'(s) - f(s,\tilde{u}(s))\big]\,ds\Big| + \Big|\int_{\tilde{t}_0}^{t_0} f(s,\tilde{u}(s))\,ds\Big| \\ &\leq d_A + d_T\big(d_G + \sup_{s\in I}|f(s,\tilde{u}(s)|\big)\,. \end{aligned}$$

Mithilfe der Integralformulierung des Anfangswertproblems aus Satz 1.20 sowie der Lipschitz-Bedingung an f sehen wir dann für $t \in I$ mit $t > t_0$

$$\begin{aligned} |u(t) - \tilde{u}(t)| &= \Big|x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))\,ds - \tilde{u}(t_0) - \int_{t_0}^{t} \tilde{u}'(s)\,ds\Big| \\ &\leq |x_0 - \tilde{u}(t_0)| + \int_{t_0}^{t} \big[\big|f(s,u(s)) - f(s,\tilde{u}(s))\big| + \big|\tilde{u}'(s) - f(s,\tilde{u}(s))\big|\big]\,ds \\ &\leq d_A + d_T\big(d_G + \sup_{s\in I}|f(s,\tilde{u}(s)|\big) + \int_{t_0}^{t} \big[L|u(s) - \tilde{u}(s)| + d_G\big]\,ds\,. \end{aligned}$$

Wenden wir nun das Lemma 3.24 auf die Funktion $w(t) := |u(t) - \tilde{u}(t)| + d_G/L$ mit Konstanten $\alpha := d_A + d_T(d_G + \sup_{s\in I} |f(s, \tilde{u}(s)|) + d_G/L$ und $\beta := L$, so folgt

$$|u(t) - \tilde{u}(t)| + \frac{d_G}{L} \leq \Big[d_A + d_T\big(d_G + \sup_{s\in I} |f(s, \tilde{u}(s)|\big) + \frac{d_G}{L}\Big] \exp\big(L(t - t_0)\big)$$

und damit die Behauptung für $t > t_0$. Die Argumentation für $t \in I$ mit $t < t_0$ geht analog. □

Bemerkungen 3.33.

(i) *Für $d_G = d_A = d_T = 0$ ist die Aussage des Lemmas genau die Eindeutigkeit von Lösungen des Anfangswertproblems.*

(ii) *Für $d_G = 0$ erhält man die Lipschitz-stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten (t_0, x_0).*

(iii) *Im allgemeinen Fall impliziert das Lemma insbesondere eine stetige Abhängigkeit sowohl von den Anfangsdaten (t_0, x_0) als auch von der Strukturfunktion f, was im nächsten Satz genauer ausgeführt wird.*

Satz 3.34 (über die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten)**.** *Seien $N \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^{1+N}$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}^N$ eine stetige Funktion, die Lipschitz-stetig bezüglich der x-Variable mit Konstante $L > 0$ wie in Lemma 3.32 ist. Dann hängt die Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} u' &= f(t, u) \\ u(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

stetig von den Anfangsdaten $(t_0, x_0) \in D$ und der Strukturfunktion f in folgendem Sinne ab: ist eine Lösung $u \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ auf einem kompakten Intervall $I \subset \mathbb{R}$, eine Umgebung U des Graphen $\{(t, u(t))\colon t \in I\}$ in D und ein $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es ein $\delta > 0$ in Abhängigkeit von ε, U, f und I, so dass die Lösung des gestörten Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \tilde{u}' &= \tilde{f}(t, \tilde{u}) \\ \tilde{u}(\tilde{t}_0) &= \tilde{x}_0 \end{cases}$$

auf ganz I existiert und die Abschätzung

$$|u(t) - \tilde{u}(t)| \leq \varepsilon \qquad \text{für } t \in I$$

erfüllt, vorausgesetzt, dass $\tilde{t}_0 \in I$, $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0) \in D$ gelten, $\tilde{f} \in C(U, \mathbb{R}^N)$ Lipschitz-stetig bezüglich der x-Variable ist und die Kleinheitsbedingungen

$$|t_0 - \tilde{t}_0| \leq \delta\,, \quad |x_0 - \tilde{x}_0| \leq \delta \quad \text{und} \quad |f(t, x) - \tilde{f}(t, x)| \leq \delta \text{ für alle } (t, x) \in U$$

gelten.

Beweis. Nachdem wir gegebenenfalls ε verkleinert haben, dürfen wir annehmen, dass $B_\varepsilon((t, u(t))) \Subset U$ für jedes $t \in I$ gilt. Sei nun $\tilde{I}_{\max}$ das maximale Existenzintervall der Lösung $\tilde{u}$ des gestörten Anfangswertproblems. Um das Abschätzungslemma 3.32 auf u und $\tilde{u}$ anwenden zu können, schätzen wir den Defekt der Gleichung ab über

$$|\tilde{u}'(t) - f(t, \tilde{u}(t))| = |f(t, \tilde{u}(t)) - \tilde{f}(t, \tilde{u}(t))| \leq \delta$$

für alle $t \in \tilde{I}_{\max}$ (beachte, dass $\tilde{u}$ nur Werte in U annehmen darf). Mit Lemma 3.32 für $d_G = d_A = d_T = \delta$ erhalten wir daher insbesondere

$$|u(t) - \tilde{u}(t)| \leq \big[\delta + \delta\big(\delta + \sup_U |f|\big) + \delta L^{-1}\big] \exp\big(L|t - t_0|\big)$$

für alle $t \in I \cap \tilde{I}_{\max}$, wobei der Parameter $\delta > 0$ noch frei wählbar ist. Diesen können wir nun in Abhängigkeit von ε, $\sup_U |f|$, L und der Länge des Intervalls I so klein bestimmen, dass die rechte Seite durch ε beschränkt ist, also dass

$$|u(t) - \tilde{u}(t)| \leq \varepsilon \qquad \text{für } t \in I \cap \tilde{I}_{\max}$$

gilt. Da in diesem Fall $\tilde{u}$ die kompakte Menge

$$\big\{(s,y) \in \mathbb{R}^{1+N} \colon \big|(s,y) - (t,u(t))\big| \leq \varepsilon \text{ für ein } t \in I\big\} \subset D$$

nicht verlässt, muss nach Satz 3.21 (i) (vgl. auch die Argumentation in Korollar 3.23) $\tilde{I}_{\max} \supset I$ gelten, so dass wir insgesamt sowohl die Existenz der Lösung $\tilde{u}$ des gestörten Anfangswertproblems auf ganz I als auch die Fehlerabschätzung $|u(t) - \tilde{u}(t)| \leq \varepsilon$ für $t \in I$ gezeigt haben. □

Da wir uns nun also für die Lösung nicht nur in Abhängigkeit von der Zeitvariable, sondern auch der Anfangsdaten (t_0, x_0) interessieren, führen wir eine neue Notation ein, um auch die Abhängigkeit von den Anfangsdaten explizit zu machen.

Definition 3.35. *Seien $N \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^{1+N}$ offen und $f \colon D \to \mathbb{R}^N$ eine stetige Funktion, die Lipschitz-stetig bezüglich der x-Variable ist. Die Abbildung*

$$(t, t_0, x_0) \mapsto u(t; t_0, x_0)$$

mit $(t_0, x_0) \in D$ und $t \in I_{\max}(t_0, x_0) = (I_-(t_0, x_0), I^+(t_0, x_0))$ auf die Auswertung zur Zeit t der maximalen Lösung des Anfangswertproblems $u' = f(t, u)$ mit $u(t_0) = x_0$ und maximalen Existenzintervall $I_{\max}(t_0, x_0)$ bezeichnet man als die charakteristische Funktion *der gewöhnlichen Differentialgleichung $u' = f(t, u)$. Dabei nennt man $I^-(t_0, x_0)$ und $I^+(t_0, x_0)$ auch die* Lebensdauerfunktionen.

Bemerkungen 3.36.

(i) *Die Aussage von Satz* 3.34 *besagt genau, dass die charakteristische Funktion stetig in allen Argumenten ist und dass die Lebensdauerfunktion $I^-(t_0, x_0)$ bzw. $I^+(t_0, x_0)$ ober- bzw. unterhalbstetig sind, sich also ein endliches maximales Existenzintervall bei hinreichend kleinem Wackeln an den Anfangsdaten (x_0, t_0) nicht sprunghaft verkleinern kann.*

(ii) *Man kann auch Familien von gewöhnlichen Differentialgleichungen betrachten, bei denen die Strukturfunktion f (und dann auch die charakteristische Funkion) von zusätzlichen Parametern abhängt, womit sich insbesondere Störungen von f beschreiben lassen (wie im vorherigen Satz $\tilde{f}$). Solange diese Abhängigkeit stetig und die Lipschitzbedingung bezüglich der x-Variable uniform ist, so hängt die zugehörige charakteristische Funktion auch stetig von diesen Parametern ab.*

Wir halten an dieser Stelle einige einfache Eigenschaften der charakteristischen Funktion fest:

Proposition 3.37 (Flusseigenschaften)**.** *Seien $N \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^{1+N}$ offen und $f \colon D \to \mathbb{R}^N$ eine stetige Funktion, die Lipschitz-stetig bezüglich der x-Variable ist. Für beliebiges $(t_0, x_0) \in D$ gelten*

(i) $u(t_0; t_0, x_0) = x_0$,

(ii) $u(t; t_0, x_0) = u(t; s, u(s; t_0, x_0))$ *für* $s, t \in I_{\max}(t_0, x_0) = I_{\max}(s, u(s; t_0, x_0))$,

(iii) $x_0 = u(t_0; s, u(s; t_0, x_0))$ *für* $s \in I_{\max}(t_0, x_0)$.

Beweis.

(i) gilt nach Definition, da $t \mapsto u(t; t_0, x_0)$ das Anfangswertproblem mit Anfangsdatum (t_0, x_0) löst.

(ii) Die beiden Funktionen $t \mapsto u(t; t_0, x_0)$ und $t \mapsto u(t; s, u(s; t_0, x_0))$ lösen beide die Differentialgleichung $u' = f(t, u)$, und für $t = s$ gilt wegen (i)

$$u(s; t_0, x_0) = u(s; s, u(s; t_0, x_0)) \,.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung müssen die beiden Funktionen übereinstimmen. Bei der zweiten Funktion startet man also einfach auf der Lösungskurve von $u(t; t_0, x_0)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt $s \in I_{\max}(t_0, x_0)$, und damit gilt auch die Aussage zu den Existenzintervallen.

(iii) ist der Spezialfall $t = t_0$ in (ii), kombiniert mit (i). □

Unter stärkeren Voraussetzungen an die Strukturfunktion kann man sogar zeigen, dass die charakteristische Funktion regulärer von den Anfangsdaten (sowie möglichen Parametern abhängt). Es gilt etwa:

Satz 3.38 (über die differenzierbare Abhängigkeit der Lösung von den Daten)**.** *Seien $N \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^{1+N}$ offen und $f \colon D \to \mathbb{R}^N$ eine stetige Funktion, die bezüglich der x-Variable differenzierbar ist, mit stetiger Ableitung $D_x f(t, x) \in C^0(D, \mathbb{R}^{N \times N})$. Dann ist die charakteristische Funktion $u(t; t_0, x_0)$ stetig differenzierbar in $(t_0, x_0) \in D$ und $t \in I_{\max}(t_0, x_0)$.*

Beweisidee. Eigentlich möchte man die Differentialgleichung nach den Anfangsdaten differenzieren und dann ausnutzen, dass diese Ableitungen ebenfalls gewöhnliche Differentialgleichungen erfüllen. Da wir jedoch nicht wissen, dass wir nach den Daten differenzieren dürfen, muss man an dieser Stelle mit Differenzenquotienten arbeiten. Betrachtet man etwa die Abhängigkeit von t_0, so arbeitet man mit den Funktionen

$$v_{t_0,h}(t) \coloneqq h^{-1}\big[u(t; t_0 + h, x_0) - u(t; t_0, x_0)\big]$$

für festes $(t_0, x_0) \in D$ und $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $|h|$ hinreichend klein (so dass insbesondere die Linie, die $(t_0 + h, x_0)$ und (t_0, x_0) verbindet, in D liegt). Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ergibt sich aus den Lösungseigenschaften von $u(t; t_0 + h, x_0)$ und $u(t; t_0, x_0)$

$$\begin{aligned} v'_{t_0,h}(t) &= h^{-1}\big[f\big(t, u(t; t_0 + h, x_0)\big) - f\big(t, u(t; t_0, x_0)\big)\big] \\ &= h^{-1} \int_0^1 \frac{d}{d\theta} f\big(t, \theta u(t; t_0 + h, x_0) + (1 - \theta) u(t; t_0, x_0)\big)\, d\theta \\ &= \int_0^1 D_x f\big(t, \theta u(t; t_0 + h, x_0) + (1 - \theta) u(t; t_0, x_0)\big)\, d\theta \, v_{t_0,h}(t) \end{aligned}$$

(wobei hier die Notation $v'_{t_0,h}(t)$ immer noch für die nun partielle Ableitung nach t stehen soll). Dies bedeutet, dass $v_{t_0,h}$ die lineare Differentialgleichung $v'_{t_0,h} = A_{t_0,h}(t) v_{t_0,h}$ löst, mit stetiger Koeffizientenmatrix

$$A_{t_0,h}(t) \coloneqq \int_0^1 D_x f\big(t, \theta u(t; t_0 + h, x_0) + (1 - \theta) u(t; t_0, x_0)\big)\, d\theta \,,$$

und wegen der Stetigkeit von $D_x f$ und u wissen wir, dass $A_{t_0,h}(t) \to D_x f(t, u(t; t_0, x_0))$ für $t \in I_{\max}(t_0, x_0)$ im Limes $h \to 0$ gilt. Außerdem erfüllt $v_{t_0,h}$ nach Definition (ohne Einschränkung betrachten wir hier nur $h > 0$), mit Proposition 3.37 (i) und wiederum mit der Lösungseigenschaft die Anfangsbedingung

$$\begin{aligned} v_{t_0,h}(t_0) &= h^{-1}\big[u(t_0; t_0 + h, x_0) - u(t_0; t_0, x_0)\big] \\ &= h^{-1}\big[u(t_0; t_0 + h, x_0) - u(t_0 + h; t_0 + h, x_0)\big] \\ &= h^{-1} \int_0^1 \frac{d}{d\theta} u(t_0 + (1 - \theta)h; t_0 + h, x_0)\, d\theta \\ &= -\int_0^1 u'(t_0 + (1 - \theta)h; t_0 + h, x_0)\, d\theta \\ &= -\int_0^1 f\big(t_0 + (1 - \theta)h, u(t_0 + (1 - \theta)h; t_0 + h, x_0)\big)\, d\theta \,, \end{aligned}$$

so dass wir wegen der Stetigkeit von f und u wissen, dass $v_{t_0,h}(t_0) \to -f(t_0, x_0)$ bei $h \to 0$ gilt. Im Limes stößt man daher auf das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} v' &= D_x f(t, u(t; t_0, x_0))v \\ v(t_0) &= -f(t_0, x_0) \end{cases}$$

mit einer linearen Differentialgleichung mit stetigen Koeffizienten, und die Lösung v möchte man schließlich noch mit der partiellen Ableitung von $u(t; t_0, x_0)$ nach t_0 identifizieren, die wir mit $\frac{\partial}{\partial \tau} u(t; t_0, x_0)$ bezeichnen. Nun hängt die Lösung v aber wegen Satz 3.34 auch stetig von den Daten, also der Koeffizientenmatrix $D_x f(t, u(t; t_0, x_0))$ und der Anfangsbedingung $-f(t_0, x_0)$, ab. Da wie oben gezeigt

$$A_{t_0,h}(t) \to D_x f(t, u(t; t_0, x_0)) \quad \text{und} \quad v_{t_0,h}(t_0) \to -f(t_0, x_0)$$

bei $h \to 0$ gelten und $v_{t_0,h}$ die Gleichung

$$v'_{t_0,h} = A_{t_0,h}(t) v_{t_0,h}$$

löst, muss also $v_{t_0,h}(t)$ bei $h \to 0$ gegen die (stetige) Lösung v der Grenzgleichung konvergieren. Somit folgt die Differenzierbarkeit von $u(t; t_0, x_0)$ nach t_0 und $v_{t_0,h}(t) \to v(t) = \frac{\partial}{\partial \tau} u(t; t_0, x_0)$ für $t \in I_{\max}(t_0, x_0)$. Zusammenfassend haben wir also gezeigt, dass wir das Anfangswertproblem (also Gleichung und Anfangsbedingung) total nach t_0 differenzieren können und dass

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} u(t; t_0, x_0) &= D_x f(t, u(t; t_0, x_0)) \frac{\partial}{\partial \tau} u(t; t_0, x_0) \\ \frac{\partial}{\partial \tau} u(t_0; t_0, x_0) &= -f(t_0, x_0) \end{cases}$$

gilt, was wir wegen der Kettenregel und $\frac{\partial}{\partial t} u(t_0; t_0, x_0) = f(t_0, x_0)$ auch genau erwarten würden.

Die differenzierbare Abhängigkeit nach dem Anfangswert x_0 geht ähnlich (allerdings müssen wir nun mit Richtungsableitungen arbeiten), und letztendlich findet man hier, dass die partiellen Ableitung von $u(t; t_0, x_0)$ nach x_0, die wir mit $\frac{\partial}{\partial y} u(t; t_0, x_0)$ bezeichnen, stetig ist und Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y_i} u(t; t_0, x_0) &= D_x f(t, u(t; t_0, x_0)) \frac{\partial}{\partial y_i} u(t; t_0, x_0) \\ \frac{\partial}{\partial y_i} u(t_0; t_0, x_0) &= e_i \end{cases}$$

für $i \in \{1, \ldots, N\}$ ist, was genau dem mithilfe der Kettenregel total nach x_0 differenzierten Anfangswertproblem entspricht. $\square$

Kapitel 4

Systeme linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Systemen von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen. Wir beschränken uns dabei im Wesentlichen auf explizite Gleichungen erster Ordnung (vgl. die Reduktion der Ordnung in Satz 1.16) und damit auf Gleichungen der Form

$$u' = A(t)u + b(t)$$

auf einem offenem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, mit stetigen Koeffizienten $A\colon I \to \mathbb{R}^{N\times N}$ und stetiger Inhomogenität $b\colon I \to \mathbb{R}^N$, für ein $N \in \mathbb{N}$. Mit dem Satz 3.15 von Picard–Lindelöf und dem globalen Existenzsatz 3.26 bekommen wir die Existenz einer eindeutigen (vektorwertigen) Lösung $u \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ für jedes Anfangswertproblem $u(t_0) = x_0$ für beliebige $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^N$, und diese Lösungen wollen wir im Folgenden genauer studieren.

4.1 Allgemeine Theorie

Wir untersuchen zunächst die Struktur des Lösungsraum und erinnern dazu an das Superpositionsprinzip für lineare Gleichungen aus Lemma 1.15, das besagt, dass für Lösungen u_1 und u_2 zu den linearen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u_1' &= A(t)u_1 + b_1(t) \\ u_2' &= A(t)u_2 + b_2(t) \end{aligned}$$

mit gleicher Koeffizientenmatrix A und möglicherweise unterschiedlichen Inhomogenitäten b_1 bzw. b_2 gilt, dass die Linearkombination $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ (mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$) die Gleichung

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)' = A(t)(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) + \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t)$$

löst. In starker Analogie zur Behandlung von linearen Gleichungssystemen $Ax = b$ (mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und einem Vektor $b \in \mathbb{R}^N$) können wir nun algebraische Eigenschaften des Lösungsraum linearer Gleichungen (oder ihrer allgemeinen Lösung) aus dem unendlich-dimensionalen Vektorraum $C^1(I, \mathbb{R}^N)$ untersuchen.

Satz 4.1 (über die algebraische Struktur der Lösungsräume)**.** *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $A \in C(I, \mathbb{R}^{N\times N})$, $b \in C(I, \mathbb{R}^N)$ und $t_0 \in I$. Die Abbildung*

$$\mathbb{R}^N \ni x_0 \mapsto u \in C^1(I, \mathbb{R}^N) \quad \text{mit } u' = A(t)u \text{ und } u(t_0) = x_0 \tag{4.1}$$

ist ein linearer Isomorphismus und es gelten:

(i) *Der Lösungsraum der homogenen Gleichung* $u' = A(t)u$ *auf* I*, also die Menge*

$$\left\{u \in C^1(I, \mathbb{R}^N) \colon u'(t) = A(t)u(t) \text{ für alle } t \in I\right\},$$

ist ein N*-dimensionaler linearer Unterraum von* $C^1(I, \mathbb{R}^N)$*;*

(ii) *Der Lösungsraum der inhomogenen Gleichung* $u' = A(t)u + b(t)$ *auf* I*, also*

$$\left\{u \in C^1(I, \mathbb{R}^N) \colon u'(t) = A(t)u(t) + b(t) \text{ für alle } t \in I\right\}, \tag{4.2}$$

ist ein N*-dimensionaler affiner Unterraum von* $C^1(I, \mathbb{R}^N)$ *und lässt sich darstellen als*

$$u_{par} + \left\{u \in C^1(I, \mathbb{R}^N) \colon u'(t) = A(t)u(t) \text{ für alle } t \in I\right\}, \tag{4.3}$$

wobei $u_{par} \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ *eine beliebige* partikuläre (*oder* spezielle) *Lösung der inhomogenen Gleichung* $u' = A(t)u + b(t)$ *auf* I *ist.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass es sich bei der Abbildung (4.1) um einen linearen Isomorphismus handelt. Die Linearität von (4.1) folgt direkt aus dem Superpositionsprinzip (angewandt mit $b_1 = b_2 = 0$). Um die Injektivität einzusehen, betrachten wir zwei Lösungen u und $\tilde{u}$ der homogenen Gleichung zu unterschiedlichen Anfangswerten $u(t_0) = x_0 \neq \tilde{x}_0 = \tilde{u}(t_0)$. Wegen dieser Zeitauswertung bei t_0 gilt offensichtlich schon $u \neq \tilde{u}$ als Funktionen in $C^1(I, \mathbb{R}^N)$ und die Abbildung (4.1) ist damit tatsächlich injektiv. Um die Surjektivität zu beweisen, betrachten wir eine beliebige Lösung $\bar{u} \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$. Wegen der eindeutigen Lösbarkeit der Gleichung nach Picard–Lindelöf (Korollar 3.26), wird $\bar{u}$ von der Abbildung (4.1) für $x_0 = \bar{u}(t_0)$ angenommen. Damit haben wir alle Eigenschaften eines linearen Isomorphimus für (4.1) gezeigt, und es fehlt nur noch die Struktur des Lösungsraums:

(i) Dimensionen und Vektorraumeigenschaft bleiben unter linearen Isomorphismen erhalten, und damit ist der Lösungsraum der homogenen Gleichung ein Unterraum von $C^1(I, \mathbb{R}^N)$ mit der Dimension N des euklidischen Raums $\mathbb{R}^N$. Da $u \equiv 0$ als Lösung der homogenen Gleichung mit $u(t_0) = 0$ enthalten ist, handelt es sich außerdem um einen linearen Unterraum.

(ii) Wir beweisen als nächstes die behauptete Darstellung des Lösungsraums der inhomogenen Gleichung und fixieren dazu eine beliebige partikuläre Lösung $u_{par} \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ (die nach Picard–Lindelöf existiert). Sei nun u ein beliebige Lösung zu $u' = A(t)u + b(t)$, also ein Element aus (4.2). Dann erfüllt $u - u_{par}$ nach dem Superpositionsprinzip die homogene Gleichung und damit gehört u zur Menge (4.3). Ist umgekehrt $\bar{u}$ aus (4.3) gegeben, so existiert nach Definition von (4.3) eine Lösung $u_{hom} \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ der homogenen Gleichung $u'_{hom} = A(t)u_{hom}$ mit $\bar{u} = u_{par} + u_{hom}$, und mit dem Superpositionsprinzip ist $\bar{u}$ auch ein Element aus (4.2). Die Eigenschaften eines affinen Unterraums für den Lösungsraum der inhomogenen Gleichung folgen nun direkt aus der eben gezeigten Darstellung. □

Bemerkung 4.2. *Für explizite lineare Systeme der Ordnung* $k > 1$

$$u^{(k)} = A_{k-1}(t)u^{(k-1)} + \ldots + A_0(t)u + b(t)$$

mit stetigen Koeffizientenfunkionen $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1} \in C(I, \mathbb{R}^{N \times N})$ *und Inhomogenität* $b \in C(I, \mathbb{R}^N)$ *erhält man entsprechend, dass die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{kN} \ni (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) \mapsto u \in C^k(I, \mathbb{R}^N) \quad & \text{mit } u(k) = A_{k-1}(t)u^{(k-1)} + \ldots + A_0(t)u \\ & \text{und } u(t_0) = x_0, u'(t_0) = x_1, \ldots, u^{(k-1)} = x_{k-1} \end{aligned}$$

ein linearer Isomorphismus ist. Außerdem sind die Lösungsräume der homogenen und inhomogenen Gleichung kN*-dimensionale lineare bzw. affine Unterräume von* $C^k(I, \mathbb{R}^N)$ *mit einer Struktur wie in Satz* 4.1.

Nach dem letzten Satz ist es ausreichend, den Lösungsraum der homogenen Gleichung (und dazu eine partikuläre Lösung) zu kennen, um den Lösungsraum der inhomogenen Gleichung zu bestimmen. Daher werden wir uns im Folgenden nur mit dem Lösungsraum der homogenen Gleichung beschäftigen und benötigen dazu also N Lösungen der homogenen Gleichung, die linear unabhängig in $C^1(I, \mathbb{R}^N)$ sind. Dabei nennen wir n Funktionen $u_1, \ldots, u_n$ in $C^k(I, \mathbb{R}^N)$ (für $k \geq 0$) linear unabhängig, falls für alle beliebigen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0 \quad &\text{in } C^k(I, \mathbb{R}^N) \\ (\Leftrightarrow \lambda_1 u_1(t) + \ldots + \lambda_n u_n(t) = 0 &\text{ für alle } t \in I) \end{aligned}$$

bereits $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ impliziert. Lineare Unabhängigkeit von Funktionen ist damit im Allgemeinen eine schwächere Eigenschaft als lineare Unabhängigkeit von Funktionswerten (so sind etwa $u_1(t) := (t, 1)$ und $u_2(t) := (1, 1)$ als Funktionen in $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ linear unabhängig, die Funktionswerte bei $t = 1$ als Vektoren in $\mathbb{R}^2$ jedoch linear abhängig). Speziell für Systeme von homogenen, linearen Differentialgleichungen gilt jedoch, dass die lineare Unabhängigkeit (als Funktionen) von Lösungen bereits äquivalent ist zur linearen Unabhängigkeit ihrer Funktionswerte zu einem beliebigen Zeitpunkt.

Korollar 4.3 (über die lineare Unabhängigkeit von Lösungen homogener linearer Systeme)**.** *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $A \in C(I, \mathbb{R}^{N \times N})$ und $n \leq N$ natürliche Zahlen. Sind $u_1, \ldots, u_n \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ Lösungen der homogenen Gleichung $u' = A(t)u$ auf I, so sind äquivalent:*

(i) *$u_1, \ldots, u_n$ sind linear unabhängige* Funktionen *in $C^1(I, \mathbb{R}^N)$;*

(ii) *$u_1(t_0), \ldots, u_n(t_0)$ sind linear unabhängige* Vektoren *in $\mathbb{R}^N$ für* alle *$t_0 \in I$;*

(iii) *$u_1(t_0), \ldots, u_n(t_0)$ sind linear unabhängige* Vektoren *in $\mathbb{R}^N$ für* ein *$t_0 \in I$.*

Beweis. Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) folgt aus der Tatsache, dass der lineare Isomorphismus (4.1) lineare Unabhängigkeit von den Anfangsvektoren auf ihre Bilder überträgt. Dazu seien $u_1, \ldots, u_n$ linear unabhängig als Funktionen in $C^1(I, \mathbb{R}^N)$ und $t_0 \in I$ ein beliebiger Zeitpunkt. Sind dann $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 u_1(t_0) + \ldots + \lambda_n u_n(t_0) = 0\,,$$

so muss die Funktion $\bar{u} := \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$ als Lösung der homogenen Gleichung mit Startwert $\bar{u}(t_0) = 0$ nach Satz 4.1 bereits konstant auf I verschwinden, also

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0 \quad \text{in } C^1(I, \mathbb{R}^N)$$

gelten. Wegen der linearen Unabhängigkeit von $u_1, \ldots, u_n$ als Funktionen in $C^1(I, \mathbb{R}^N)$ folgt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ und damit die lineare Unabhängigkeit von $u_1(t_0), \ldots, u_n(t_0)$ als Vektoren in $\mathbb{R}^N$. Die beiden anderen Implikationen (ii) $\Rightarrow$ (iii) sowie (iii) $\Rightarrow$ (i) gelten offensichtlich (und unabhängig von der Lösungseigenschaft der Funktionen $u_1, \ldots, u_n$). $\square$

Definition 4.4. *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A \in C(I, \mathbb{R}^{N \times N})$. Eine Basis des Lösungsraums des Systems homogener linearer Differentialgleichungen $u' = A(t)u$ (also eine Menge von N linear unabhängigen Lösungen) nennt man ein* Fundamentalsystem *oder* Hauptsystem *zu $u' = A(t)u$. Ferner nennt man eine $(N \times N)$-Matrix, deren Spalten ein Fundamentalsystem bilden, eine* Fundamentalmatrix.

Ein Fundamentalsystem zu einem linearen System $u' = A(t)u$ zu finden ist äquivalent dazu, die allgemeine Lösung zu bestimmen. Bevor wir Fundamentalsysteme und deren Eigenschaften diskutieren, überlegen wir uns zunächst, wie man elegant ein solches erhalten bzw. gegebene Lösungen auf ihre lineare Unabhängigkeit überprüfen kann.

Definition 4.5. *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $A \in C(I, \mathbb{R}^{N \times N})$ und $u_1, \ldots, u_N$ Lösungen der homogenen Gleichung $u' = A(t)u$ auf I. Die Funktion $W \in C^1(I, \mathbb{R}^{N \times N})$, deren Spalten aus diesen Lösungen besteht, also*

$$W(t) := (u_1(t), \ldots, u_n(t)) \qquad \text{für } t \in I\,,$$

heißt die zu $u_1, \ldots, u_N$ gehörige Wronski-Matrix. *Ihre Determinante $w := \det W \in C^1(I)$ bezeichnet man ferner als* Wronski-Determinante.

Korollar 4.6 (lineare Unabhängigkeit und Wronski-Determinante)**.** *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $A \in C(I, \mathbb{R}^{N\times N})$ und $u_1, \dots, u_N \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ Lösungen der homogenen Gleichung $u' = A(t)u$ auf I. Dann gilt für die zugehörige Wronski-Determinante $w \in C^1(I)$*

- entweder $w(t) = 0$ *für alle $t \in I$ und die Funktionen $u_1, \dots, u_N$ sind linear abhängig in $C^1(I, \mathbb{R}^N)$*
- oder $w(t) \neq 0$ *für alle $t \in I$ und die Funktionen $u_1, \dots, u_N$ sind linear unabhängig in $C^1(I, \mathbb{R}^N)$ (d.h. die Wronski-Matrix ist in diesem Fall tatsächlich eine Fundamentalmatrix).*

Beweis. Diese Aussage ist klar nach Korollar 4.3 (angewandt mit $n = N$). □

Für die Berechnung der Wronski-Determinante ist die Lösungseigenschaft der einzelnen Spalten hilfreich, denn diese führt auf die folgende einfache Formel:

Satz 4.7 (Formel für die Wronski-Determinante)**.** *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $A \in C(I, \mathbb{R}^{N\times N})$ und $u_1, \dots, u_N \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ Lösungen der homogenen Gleichung $u' = A(t)u$ auf I. Dann löst die zu $u_1, \dots, u_N$ gehörige Wronski-Determinante $w \in C^1(I)$ die skalare gewöhnliche Differentialgleichung*

$$w' = \big[\operatorname{Spur} A(t)\big] w$$

und hat damit für beliebige $t_0, t \in I$ die Darstellung

$$w(t) = w(t_0) \exp\Big[\int_{t_0}^{t} \operatorname{Spur} A(s)\, ds\Big].$$

Beweis. Im Folgenden bezeichnen wir mit $w_{i,j}$ den Eintrag der Matrix W in Zeile i und Spalte j, der also nach Definition von W genau der i-ten Komponente der Funktion u_j entspricht. Mithilfe der Leibniz-Formel schreiben wir die Determinante zunächst als

$$w(t) = \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{N} w_{j,\sigma(j)}(t)\,,$$

wobei die Summe über alle Permutationen der Menge $\{1, \dots, N\}$ läuft. Mit der Produktregel gilt daher für die Ableitung

$$w'(t) = \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{k=1}^{N} w'_{k,\sigma(k)}(t) \prod_{j=1, j\neq k}^{N} w_{j,\sigma(j)}(t)\,.$$

Aufgrund der Lösungseigenschaft der Funktionen $u_1, \dots, u_N$ sowie der Definition von W gilt nun $w'_{k,\ell}(t) = \sum_{m=1}^{N} a_{k,m}(t) w_{m,\ell}(t)$ (mit $k, \ell \in \{1, \dots, N\}$), und eingesetzt in die letzte Formel ergibt sich

$$w'(t) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} a_{k,m}(t) \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) w_{m,\sigma(k)}(t) \prod_{j=1, j\neq k}^{N} w_{j,\sigma(j)}(t)\,.$$

Um diese Summe auszuwerten, stellen wir fest, dass

$$\sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) w_{m,\sigma(k)}(t) \prod_{j=1, j\neq k}^{N} w_{j,\sigma(j)}(t)$$

wieder die Berechnung einer Determinante über die Leibniz-Formel ist, und zwar der Matrix, die entsteht, wenn man in der Matrix W die Zeile k durch die Zeile m ersetzt. Dieser Ausdruck verschwindet also für $k \neq m$ und gibt im Fall $k = m$ genau $\det W(t) = w(t)$ zurück. Daher gilt wie behauptet

$$w'(t) = \sum_{k=1}^{N} a_{k,k}(t) w(t) = \big[\operatorname{Spur} A(t)\big] w(t)\,.$$

Da es sich hierbei um eine skalare, homogene, lineare Gleichung handelt, folgt die Darstellung für $w(t)$ aus der Lösungsformel in Satz 2.5. □

Bemerkung 4.8. *Alle Wronski-Determinanten genügen* derselben *skalaren linearen Differentialgleichung, die nur von der Koeffizientenmatrix* (*genauer sogar nur von der Summe der Hauptdiagonale*) *des ursprünglichen Systems abhängt. Der einzige Unterschied für verschiedene Wronski-Determinanten liegt damit in der Anfangsbedingung.*

Hat man einmal ein Fundamentalsystem zu einem linearen System $u' = A(t)u$ auf I bestimmt, so ist die zugehörige Fundamentalmatrix nach Korollar 4.6 an jeder Stelle $t \in I$ invertierbar, und damit erhalten wir nun auch eine Darstellung für die Lösung jeden Anfangswertproblems.

Satz 4.9 (Darstellung der Lösungen homogener Gleichungen mittels Fundamentalmatrix)**.** *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $A \in C(I, \mathbb{R}^{N\times N})$, $t_0 \in I$ und $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Ist $M \in C^1(I, \mathbb{R}^{N\times N})$ eine beliebige Fundamentalmatrix zu $u' = A(t)u$ auf I, so hat die eindeutige Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems mit $u(t_0) = x_0$ die Darstellung*

$$u(t) = M(t)(M(t_0))^{-1}x_0 \qquad \text{für } t \in I\,.$$

Beweis. Die Lösung des Anfangswertproblem ist eine Linearkombination aus den Spaltenvektoren der gegebenen Fundamentalmatrix, und die Koeffizienten der Linearkombination sind durch die Anfangsbedingung eindeutig festgelegt. Das angegebene u ist genau eine Linearkombination aus Spaltenvektoren von M, deren Koeffizienten genau die Einträgen des Vektors $(M(t_0))^{-1}x_0 \in \mathbb{R}^N$ sind. Da für $t = t_0$ außerdem

$$u(t_0) = M(t_0)(M(t_0))^{-1}x_0 = x_0$$

gilt, ist u tatsächlich die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems. □

Fundamentalmatrizen zu linearen Systemen sind offensichtlich nicht eindeutig bestimmt, man kann etwa einzelne Spalten vertauschen oder mit einer nicht-verschwindenden Zahl multiplizieren. Wegen des Superpositionsprinzips kann man auch mit einer konstanten, invertierbaren Matrix von rechts multiplizieren (denn die einzelnen Spalten sind dann immer noch Lösungen und nach Korollar 4.6 auch linear unabhängig). Dies ist aber tatsächlich schon das größte Maß an Uneindeutigkeit für Fundamentalmatrizen.

Satz 4.10 (Zusammenhang verschiedener Fundamentalmatrizen)**.** *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $A \in C(I, \mathbb{R}^{N\times N})$ und $M \in C^1(I, \mathbb{R}^{N\times N})$ eine beliebige Fundamentalmatrix zu $u' = A(t)u$ auf I. Eine Matrixfunktion $\tilde{M} \in C^1(I, \mathbb{R}^{N\times N})$ ist genau dann ebenfalls eine Fundamentalmatrix zu $u' = A(t)u$ auf I, falls es eine* (*konstante*) *invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{N\times N}$ gibt, so dass*

$$\tilde{M}(t) = M(t)T \qquad \text{für alle } t \in I \text{ gilt.}$$

Beweis. Sei zunächst $T \in \mathbb{R}^{N\times N}$ eine invertierbare Matrix. Dann sind, wie oben bereits festgestellt, die Spalten der Matrix $\tilde{M}$ Linearkombinationen aus Spalten von M, also wieder Lösungen zu $u' = A(t)u$ auf I, und $\tilde{M}$ ist damit eine Wronski-Matrix. Da sowohl $M(t)$ für jedes $t \in I$ als auch T nach Annahme invertierbar sind, ist auch $\tilde{M}(t)$ für jedes $t \in I$ invertierbar und somit nach Korollar 4.6 wie behauptet eine Fundamentalmatrix.

Ist umgekehrt $\tilde{M} \in C^1(I, \mathbb{R}^{N\times N})$ eine weitere Fundamentalmatrix, so bekommen wir mithilfe von Satz 4.9 zwei unterschiedliche Darstellungen für die eindeutige Lösung jeden Anfangswertproblems zu $u' = A(t)u$. Für jedes $t_0 \in I$ und $x_0 \in \mathbb{R}^N$ gilt also

$$M(t)(M(t_0))^{-1}x_0 = \tilde{M}(t)(\tilde{M}(t_0))^{-1}x_0\,.$$

Wählt man nun den Startwert x_0 als die N Spalten der Matrix $\tilde{M}(t_0)$, so ergibt sich mit der Definition der (regulären) Matrix $T := (M(t_0))^{-1}\tilde{M}(t_0)$ die gewünschte Identität

$$M(t)T = M(t)(M(t_0))^{-1}\tilde{M}(t_0) = \tilde{M}(t)\,.$$ □

Wie wir gesehen haben, sind die Fundamentalmatrizen prinzipiell zwar nicht eindeutig, jedoch kann man eine besondere Fundamentalmatrix auszeichnen, deren Spalten gerade den Lösungen des Anfangswertproblems zu $u' = A(t)u$ mit den kanonischen Einheitsvektoren als Startwerten entsprechen.

Definition 4.11. *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $A \in C(I, \mathbb{R}^{N\times N})$ und $t_0 \in I$. Die eindeutig bestimmte Fundamentalmatrix zu $u' = A(t)u$, deren i-te Spalte gerade durch die Lösung des Anfangswertproblems zu $u' = A(t)u$ mit Anfangswert $u(t_0) = e_i$ (und mit e_i dem i-ten kanonischen Einheitsvektor in $\mathbb{R}^N$) gegeben ist, heißt die* Übergangsmatrix (*oder* Transititionsmatrix *oder* Hauptfundamentalmatrix) *zu $u' = A(t)u$ mit Startzeit t_0 und wird mit $\Psi(t, t_0)$ bezeichnet.*

Bemerkungen 4.12.

(i) *Jede Fundamentalmatrix $M \in C^1(I, \mathbb{R}^{N\times N})$ löst per Definition die Matrix-Differentialgleichung*

$$M' = A(t)M \qquad \text{auf } I\,,$$

und die Übergangsmatrix ist gerade die Fundamentalmatrix mit $M(t_0) = \mathbb{1}_{N\times N}$.

(ii) *Ist $M \in C^1(I, \mathbb{R}^{N\times N})$ eine beliebige Fundamentalmatrix, so ergibt sich mit Satz 4.10 (sowie der Tatsache $\Psi(t_0, t_0) = \mathbb{1}_{N\times N}$) die Formel*

$$\Psi(t, t_0) = M(t)(M(t_0)))^{-1} \qquad \text{für alle } t, t_0 \in I\,.$$

(iii) *Ist $x_0 \in \mathbb{R}^N$, so löst $u(t) := \Psi(t, t_0)x_0$ die gewöhnliche Differentialgleichung $u' = A(t)u$ mit Anfangswert $u(t_0) = x_0$, denn es gelten mit der ersten Bemerkung*

$$\frac{d}{dt}\big[\Psi(t, t_0)x_0\big] = A(t)\Psi(t, t_0)x_0$$

und $u(t_0) = \Psi(t_0, t_0)x_0 = x_0$. Dieser Zusammenhang begründet die Namenswahl Übergangsmatrix.

Beispiel 4.13. *Für $N = 2$ sei eine Matrixfunktion $A \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{2\times 2})$ durch*

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}^+$$

gegeben. Zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung $u' = A(t)u$ sind etwa die Funktionen

$$\tilde{u}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \tilde{u}_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix} \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}^+\,.$$

Zum einen kann man die Übergangsmatrix zu $u' = A(t)u$ mit Startzeit $t_0 \in \mathbb{R}^+$ nun durch das Lösen der beiden Anfangswertprobleme

$$\begin{cases} u_1' &= A(t)u_1 \\ u_1(t_0) &= e_1 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \begin{cases} u_2' &= A(t)u_2 \\ u_2(t_0) &= e_2 \end{cases}$$

bestimmen, wobei man hier u_1 und u_2 als geeignete Linearkombinationen aus $\tilde{u}_1$ und $\tilde{u}_2$ berechnen kann. Zum anderen kann man auch die zu $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ gehörige Fundamentalmatrix M verwenden, $(M(t_0))^{-1}$ berechnen und die Übergangsmatrix $\Psi(t, t_0)$ mittels der Formel $M(t)(M(t_0)))^{-1}$ bestimmen. So erhält man

$$\Psi(t, t_0) = \begin{pmatrix} \frac{2t}{t_0} - \frac{t^2}{t_0^2} & -t + \frac{t^2}{t_0} \\ \frac{2}{t_0} - \frac{2t}{t_0^2} & -1 + \frac{2t}{t_0} \end{pmatrix} \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}^+\,.$$

Lemma 4.14 (Eigenschaften der Übergangsmatrix)**.** *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $A \in C(I, \mathbb{R}^{N\times N})$ und $t_0, t, s \in I$. Dann hat die Übergangsmatrix $\Psi(t, t_0)$ zur Gleichung $u' = A(t)u$ mit Startzeit t_0 die folgenden Eigenschaften:*

(i) $\Psi(t_0, t_0) = \mathbb{1}_{N\times N}$,

(ii) $\Psi(t, s)\Psi(s, t_0) = \Psi(t, t_0)$,

(iii) $(\Psi(t,t_0))^{-1} = \Psi(t_0,t)$,

(iv) $\Psi(t,t_0)$ *ist in beiden Argumenten stetig differenzierbar.*

Beweis.

(i) gilt nach Definition.

(ii) Sei M eine beliebige Fundamentalmatrix zu $u' = A(t)u$. Mit Bemerkung 4.12 (ii) folgt

$$\Psi(t,s)\Psi(s,t_0) = M(t)(M(s))^{-1}M(s)(M(t_0))^{-1} = M(t)(M(t_0))^{-1} = \Psi(t,t_0)\,.$$

(iii) Ist M wieder eine beliebige Fundamentalmatrix wie eben, so folgt mit der Invertierbarkeit von M für alle $t \in I$ sowie der Formel für die Inverse von Matrixprodukten

$$(\Psi(t,t_0))^{-1} = \big(M(t)(M(t_0))^{-1}\big)^{-1} = \big((M(t_0))^{-1}\big)^{-1}(M(t))^{-1} = M(t_0)(M(t))^{-1} = \Psi(t_0,t)\,.$$

(iv) Die Abbildung $t \mapsto \Psi(t,t_0)$ ist für festes $t_0 \in I$ nach Definition stetig differenzierbar, da die Spalten von $\Psi(t,t_0)$ als Lösungen der homogenen Gleichung insbesondere in $C^1(I,\mathbb{R}^N)$ sind. Für die Ableitung gilt nach Bemerkung 4.12 (i) die Formel

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,t_0) = A(t)\Psi(t,t_0)\,.$$

Um die stetige Differenzierbarkeit der Abbildung $t_0 \mapsto \Psi(t,t_0)$ zu beweisen, definieren wir Y als die eindeutige Matrixfunktion in $C^1(I,\mathbb{R}^{N\times N})$, die die Matrix-Differentialgleichung

$$Y' = -YA(t)$$

auf I mit Anfangswert $Y(t_0) = \mathbb{1}_{N\times N}$ löst. Für das Produkt $Y(t)\Psi(t,t_0)$ gilt dann mit der Produktregel und den Formeln für die Ableitungen von Y und $\Psi(t,t_0)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(Y(t)\Psi(t,t_0)\big) = Y'(t)\Psi(t,t_0) + Y(t)\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,t_0) = -Y(t)A(t)\Psi(t,t_0) + Y(t)A(t)\Psi(t,t_0) = 0\,.$$

Das bedeutet also, dass $Y(t)\Psi(t,t_0)$ auf ganz I konstant gleich $Y(t_0)\Psi(t_0,t_0) = 1_{N\times N}$ ist, so dass $Y(t)$ für jedes $t \in I$ die Inverse von $\Psi(t,t_0)$ ist. Mit (iii) haben wir somit $Y(t) = \Psi(t_0,t)$ für $t \in I$ identifiziert und damit insbesondere auch die behauptete Differenzierbarkeit in der zweiten Variable gezeigt. □

Bisher haben wir uns ausschließlich mit der homogenen Gleichung beschäftigt und für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u' &= A(t)u \\ u(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

die Lösungsformeln

$$u(t) = M(t)(M(t_0))^{-1}x_0 = \Psi(t,t_0)x_0$$

für jede beliebige Fundamentalmatrix M und die Übergangsmatrix $\Psi(t,t_0)$ mit Startzeit t_0 gezeigt. Um nun das entsprechende Anfangswertproblem für die inhomogene Gleichung $u' = A(t)u + b(t)$ zu lösen, müssen wir nach Satz 4.1 nur noch eine partikuläre Lösungen finden (die Anfangswert 0 bei t_0 hat, so dass der Anfangswert in Summe weiterhin x_0 ist). Diese partikuläre Lösungen können wir wieder mit dem Ansatz der *Variation der Konstanten* wie im skalaren Fall bestimmen.

Satz 4.15 (Darstellung der Lösungen inhomogener Gleichungen mittels Fundamentalmatrix)**.** *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $A \in C(I,\mathbb{R}^{N\times N})$, $b \in C(I,\mathbb{R}^N)$, $t_0 \in I$ und $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Ist $M \in C^1(I,\mathbb{R}^{N\times N})$*

eine beliebige Fundamentalmatrix zu $u' = A(t)u$ auf I sowie $\Psi(t,t_0)$ die Übergangsmatrix zu $u' = A(t)u$ mit Startzeit t_0, so hat die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u' &= A(t)u + b(t) \\ u(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

die Darstellung

$$u(t) = M(t)\Big[(M(t_0))^{-1}x_0 + \int_{t_0}^{t} (M(s))^{-1}b(s)\,ds\Big] = \Psi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Psi(t,s)b(s)\,ds \qquad \text{für } t \in I\,.$$

Beweis. Wir wählen als Ansatz für die partikuläre Lösung

$$u_{par}(t) = M(t)(M(t_0))^{-1}C(t)$$

für eine unbekannte Funktion $C \in C^1(I,\mathbb{R}^N)$ mit $C(t_0) = 0 \in \mathbb{R}^N$. Damit u_{par} die inhomogene Gleichung löst, muss für $t \in I$

$$\begin{aligned} b(t) &\overset{!}{=} u'_{par}(t) - A(t)u_{par}(t) \\ &= M'(t)(M(t_0))^{-1}C(t) + M(t)(M(t_0))^{-1}C'(t) - A(t)M(t)(M(t_0))^{-1}C(t) \\ &= A(t)M(t)(M(t_0))^{-1}C(t) + M(t)(M(t_0))^{-1}C'(t) - A(t)M(t)(M(t_0))^{-1}C(t) \\ &= M(t)(M(t_0))^{-1}C'(t) \end{aligned}$$

gelten, also $C'(t) = M(t_0)(M(t))^{-1}b(t)$. Mit der Anfangsbedingung $C(t_0) = 0$ und wegen unseres speziellen Ansatzes ergeben sich nun

$$C(t) = M(t_0)\int_{t_0}^{t} (M(s))^{-1}b(s)\,ds \quad \text{und} \quad u_{par}(t) = M(t)\int_{t_0}^{t} (M(s))^{-1}b(s)\,ds\,.$$

Die Darstellung der Lösung des Anfangswertproblems für die inhomogene Gleichung folgt dann durch Addition der eben bestimmten partikulären Lösung und der Lösung des Anfangswertproblems zur homogenen Gleichung, für die wir in Satz 4.9 eine Darstellungsformel gezeigt haben.

Alternativ hätten wir die Lösungseigenschaft der Funktion u auch mithilfe der Ableitungsregel für Matrixprodukte verifizieren können:

$$\begin{aligned} u'(t) &= M'(t)\Big[(M(t_0))^{-1}x_0 + \int_{t_0}^{t} (M(s))^{-1}b(s)\,ds\Big] + M(t)(M(t))^{-1}b(t) \\ &= A(t)M(t)\Big[(M(t_0))^{-1}x_0 + \int_{t_0}^{t} (M(s))^{-1}b(s)\,ds\Big] + b(t) = A(t)u(t) + b(t)\,, \end{aligned}$$

und mit $u(t_0) = M(t_0)[(M(t_0))^{-1}x_0 + 0] = x_0$ gilt offensichtlich auch die geforderte Anfangsbedingung.

Die zweite Darstellung der Lösung folgt unmittelbar aus der ersten, wenn man den Zusammenhang $\Psi(t,t_0) = M(t)(M(t_0))^{-1}$ für jede beliebige Fundamentalmatrix M und alle $t, t_0 \in I$ ausnutzt. □

4.2 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wir spezialisieren uns nun auf Systeme von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, also auf Gleichungen der Form

$$u' = Au + b(t)$$

auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$, mit einer konstanten quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und einer stetigen Inhomogenität $b\colon I \to \mathbb{R}^N$, für ein $N \in \mathbb{N}$. Wir konzentrieren uns vor allem auf den homogenen

Fall, da wir dann für die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lediglich noch eine partikuläre Lösung finden müssen (vgl. Satz 4.1).

Für allgemeine stetige Koeffizienten ist es typischerweise sehr schwierig, ein Fundamentalsystem bzw. die allgemeine Lösung für die homogene Gleichung anzugeben, wohingegen für die hier betrachteten konstanten Koeffizienten ein explizites Lösungsverfahren mithilfe der *Matrix-Exponentialfunktion* angegeben werden kann (vgl. den Ansatz mit den Nullstellen des charakteristischen Polynoms für skalare, lineare Gleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten). Eine erste Idee ist die folgende: ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert zu $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und $v_\lambda \in \mathbb{R}^N$ ein zugehöriger Eigenvektor, so ist die Funktion $u_\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ definiert über $u_\lambda(t) := \exp(\lambda t)v_\lambda$ eine Lösung der homogenen Gleichung, da

$$u_\lambda'(t) = \exp(\lambda t)\lambda v_\lambda = \exp(\lambda t)Av_\lambda = Au_\lambda(t)$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt. Da es zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ aber nicht notwendigerweise N linear unabhängige Eigenvektoren gibt, können wir mit diesem Ansatz im Allgemeinen nicht den N-dimensionalen Lösungsraum der homogenen Gleichung, also ein Fundamentalsystem zu $u' = Au$, bestimmen. Jedes Fundamentalsystem M löst jedoch die Matrix-Differentialgleichung $M' = AM$, vgl. Bemerkung 4.12, also kommt rein formal die Matrix-Exponentialfunktion $M(t) = \exp(tA)$ in Frage. Auf dem Raum der (reellen oder komplexen) quadratischen Matrizen, ausgestattet mit der Operatornorm

$$\|A\| := \sup\left\{|Ax| \colon x \in \mathbb{C}^N \text{ mit } |x| \le 1\right\}$$

(oder jeder anderen Norm, die $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$ für $A, B \in \mathbb{C}^{N\times N}$ erfüllt), kann man tatsächlich Matrix-(Potenzreihen)funktionen einführen: Ist $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine beliebige Funktion mit einer Potenzreihenentwicklung, so kann man die entsprechende Matrix-Funktion definieren, indem man formal die Potenzen durch Matrix-Potenzen ersetzt. Dass dies mindestens auf allen Matrizen wohldefiniert ist, deren Norm kleiner als der Konvergenzradius der Potenzreihe ist, besagt genau der folgende

Satz 4.16 (und Definition)**.** *Mit $p(x) = \sum_{\ell=0}^\infty c_\ell x^\ell$ sei eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0, Koeffizienten $(c_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{C}$ und Konvergenzradius $R \in (0, \infty]$ gegeben. Ist A eine quadratischen Matrix in $\mathbb{C}^{N\times N}$ für ein $N \in \mathbb{N}$ und ist $\|A\| < R$ erfüllt, so existiert*

$$\sum_{\ell=0}^\infty c_\ell A^\ell = \lim_{n\to\infty} \sum_{\ell=0}^n c_\ell A^\ell \qquad \text{mit } A^0 := \mathbb{1}_{N\times N}$$

in $\mathbb{C}^{N\times N}$. Damit ist die Potenzreihenfunktion *$p(A) := \sum_{\ell=0}^\infty c_\ell A^\ell$ auf der Menge der quadratischen Matrizen mit $\{A \in \mathbb{C}^{N\times N} \colon \|A\| < R\}$ wohldefiniert.*

Beweis. Da $(\mathbb{C}^{N\times N}, \|\cdot\|)$ ein vollständiger Raum ist, brauchen wir lediglich zu zeigen, dass die Folge $(\sum_{\ell=0}^n c_\ell A^\ell)_{n\in\mathbb{N}}$ die Cauchyeigenschaft bezüglich der Operatornorm besitzt. Für $m > n$ gilt

$$\Big\|\sum_{\ell=0}^m c_\ell A^\ell - \sum_{\ell=0}^n c_\ell A^\ell\Big\| = \Big\|\sum_{\ell=n+1}^m c_\ell A^\ell\Big\| \le \sum_{\ell=n+1}^m |c_\ell|\|A^\ell\| \le \sum_{\ell=n+1}^m |c_\ell|\|A\|^\ell,$$

und wegen $\|A\| < R$ konvergiert die rechte Seite bei $m, n \to \infty$ wegen des Majorantenkriteriums gegen 0. □

Bemerkung 4.17. *Die Potenzreihenfunktion ist im Allgemeinen tatsächlich auf einer größeren Menge als $\{A \in \mathbb{C}^{N\times N} \colon \|A\| < R\}$ definiert. Ist $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ beispielsweise eine nilpotente Matrix, gilt also $A^{n+1} = \mathbb{O}_{N\times N}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (und damit $A^\ell = \mathbb{O}_{N\times N}$ für alle $\ell \ge n+1$), so bricht die Reihe bei n ab und $p(A)$ ist wohldefiniert, unabhängig vom Wert $\|A\|$.*

Beispiele 4.18.

(i) *Die* Neumannsche Reihe *ist eine Verallgemeinerung der geometrischen Reihe und für alle $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ definiert, so dass $\lim_{n\to\infty} \sum_{\ell=0}^n A^\ell$ in $\mathbb{C}^{N\times N}$ konvergiert. Dies ist insbesondere für alle*

$A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ mit $\|A\| < 1$ der Fall, und der Wert der Neumannschen Reihe ist $(\mathbb{1}_{N\times N} - A)^{-1}$, denn es gilt analog zum skalaren Fall

$$(\mathbb{1}_{N\times N} - A)\sum_{\ell=0}^{\infty} A^\ell = \sum_{\ell=0}^{\infty} A^\ell - \sum_{\ell=1}^{\infty} A^\ell = A^0 = \mathbb{1}_{N\times N}\,.$$

(ii) *Die* Matrix-Exponentialfunktion

$$\exp(A) := \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} A^\ell$$

ist für alle $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ wohldefiniert (wie auch $\cos(A)$, $\sin(A)$ und alle Potenzreihen mit Konvergenzradius $R = \infty$).

(iii) *Die* Matrix-Logarithmusfunktion

$$\log(\mathbb{1}_{N\times N} + A) := \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell-1}}{\ell} A^\ell$$

ist insbesondere für alle $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ mit $\|A\| < 1$ wohldefiniert (und es gilt wie im skalaren Fall die Formel $\exp(\log(\mathbb{1}_{N\times N} + A)) = \mathbb{1}_{N\times N} + A$).

Wir beschäftigen uns nun genauer mit der Matrix-Exponentialfunktion und ihren Eigenschaften.

Lemma 4.19 (allgemeine Rechengesetze für die Matrix-Exponentialfunktion)**.** *Für $A, B \in \mathbb{C}^{N\times N}$ gelten die folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für die Nullmatrix $\mathbb{O}_{N\times N}$ in $\mathbb{C}^{N\times N}$ gilt $\exp(\mathbb{O}_{N\times N}) = \mathbb{1}_{N\times N}$.*

(ii) *Ist A^T die zu A transponierte Matrix, so gilt $(\exp(A))^T = \exp(A^T)$.*

(iii) *Ist B regulär, so gilt $B^{-1}\exp(A)B = \exp(B^{-1}AB)$.*

(iv) *Kommutieren A und B, ist also $AB = BA$ erfüllt, so gelten*

$$\exp(A)B = B\exp(A)\,,$$
$$\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B) = \exp(B+A) = \exp(B)\exp(A)\,.$$

(v) *Die Matrix $\exp(A)$ ist invertierbar mit $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$.*

(vi) *Die Abbildung $t \mapsto \exp(tA)$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt*

$$\frac{d}{dt}\big(\exp(tA)\big) = \exp(tA)A = A\exp(tA)\,.$$

Beweis.

(i) Wegen $\mathbb{O}^0_{N\times N} = \mathbb{1}_{N\times N}$ ist das klar nach Definition der Matrix-Exponentialfunktion.

(ii) Diese und die nächste Aussage kann man mit der Definition der Matrix-Exponentialfunktion einfach nachrechnen, wir zeigen hier aber zunächst die allgemeine Aussage, dass für jede lineare Abbildung $L\colon \mathbb{C}^{N\times N} \to \mathbb{C}^{N\times N}$, die $L(A^\ell) = (L(A))^\ell$ für alle $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ und $\ell \in \mathbb{N}$ erfüllt, die Anwendung von L und exp vertauscht werden kann. Für jedes beliebige $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ haben wir nämlich

$$\begin{aligned} L(\exp(A)) &= L\Big(\lim_{n\to\infty}\sum_{\ell=0}^{n} c_\ell A^\ell\Big) = \lim_{n\to\infty} L\Big(\sum_{\ell=0}^{n} c_\ell A^\ell\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{\ell=0}^{n} c_\ell L(A^\ell) = \lim_{n\to\infty}\sum_{\ell=0}^{n} c_\ell (L(A))^\ell = \exp(L(A))\,, \end{aligned}$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen wegen der Stetigkeit, das dritte wegen der Linearität von L und das vierte wegen der Zusatzeigenschaft an L gilt. Um die Aussage (ii) zu zeigen, definieren wir eine Abbildung $L_2\colon \mathbb{C}^{N\times N} \to \mathbb{C}^{N\times N}$ durch $L_2(A) := A^T$ für $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ und bemerken, dass die zuvor geforderten Eigenschaften klar sind. Mit der Anwendung der Vertauschbarkeit von L_2 und exp gilt damit für $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$

$$(\exp(A))^T = L_2(\exp(A)) = \exp(L_2(A)) = \exp(A^T)\,.$$

(iii) Für eine fixierte reguläre Matrix $B \in \mathbb{C}^{N\times N}$ definieren wir $L_3\colon \mathbb{C}^{N\times N} \to \mathbb{C}^{N\times N}$ durch $L_3(A) := B^{-1}AB$ für $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$. Auch hier sind die Voraussetzungen für die Vertauschbarkeit von L_3 und exp gewährleistet, und daher gilt für $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$

$$B^{-1}\exp(A)B = L_3(\exp(A)) = \exp(L_3(A)) = \exp(B^{-1}AB)\,.$$

(iv) Diese beiden Eigenschaften rechnen wir direkt mithilfe der Kommutativität und der Definition der Matrix-Exponentialfunktion nach. Zum einen haben wir

$$\exp(A)B = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} A^\ell B = B \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} A^\ell = B\exp(A)\,.$$

Zum anderen gilt wegen der Leibniz-Produktformel

$$(A+B)^\ell = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} A^j B^{\ell-j} = \sum_{j=0}^{\ell} \frac{\ell!}{j!\,(\ell-j)!} A^j B^{\ell-j}\,,$$

womit man mit Vertauschung der Summationen und einer Indexverschiebung direkt nachrechnen kann, dass

$$\begin{aligned}\exp(A+B) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!}(A+B)^\ell = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\ell} \frac{1}{j!\,(\ell-j)!} A^j B^{\ell-j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j \sum_{\ell=j}^{\infty} \frac{1}{(\ell-j)!} B^{\ell-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} B^\ell = \exp(A)\exp(B)\end{aligned}$$

gilt. Mit $\exp(A+B) = \exp(B+A) = \exp(B)\exp(A)$ folgt daher auch die zweite Formel.

(v) Da A und $-A$ offensichtlich kommutieren, gilt mit (i) und (iv)

$$\mathbb{1}_{N\times N} = \exp(\mathbb{O}_{N\times N}) = \exp(A-A) = \exp(A)\exp(-A) = \exp(-A)\exp(A)\,,$$

folglich existiert die Inverse $(\exp(A))^{-1}$ und ist gleich $\exp(-A)$.

(vi) Es gilt $\lim_{h\to\infty} h^{-1}(\exp(hA) - \mathbb{1}_{N\times N}) = A$. Daher folgt mit Differenzenquotienten und (iv)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\exp(tA) &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(tA+hA) - \exp(tA)}{h} = \exp(tA) \lim_{h\to 0} \frac{\exp(hA) - \mathbb{1}_{N\times N}}{h} \\ &= \exp(tA)A \lim_{h\to 0} \exp(hA) = \exp(tA)A = A\exp(tA)\end{aligned}$$

(alternativ: gliedweise Differentiation). □

Bemerkung 4.20. *Mit der Differentiationsformel* (vi) *haben wir für beliebige* $t, t_0 \in \mathbb{R}$ *und* $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ *insbesondere*

$$\frac{d}{dt}\exp((t-t_0)A) = A\exp((t-t_0)A)$$

verifiziert. Da wegen (i) *auch* $\exp((t_0-t_0)A) = \exp(\mathbb{O}_{N\times N}) = \mathbb{1}_{N\times N}$ *gilt, haben wir mit*

$$\Psi(t,t_0) = \exp((t-t_0)A)$$

nun eine Formel für die Übergangsmatrix zu $u' = Au$ *mit Startzeit* t_0 *gefunden.*

Nun müssen wir die Matrix-Exponentialfunktion aber auch konkret berechnen können. Unter einigen Strukturannahmen ist dies vergleichsweise einfach.

Lemma 4.21 (spezielle Rechengesetze für die Matrix-Exponentialfunktion)**.**

(i) *Ist $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ nilpotent vom Grad $n+1$, also mit $A^{n+1} = \mathbb{O}_{N\times N} \neq A^n$, so gilt*

$$\exp(A) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} A^\ell \,.$$

(ii) *Ist $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ eine Diagonalmatrix, also von der Form $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ für $\lambda_j \in \mathbb{C}$ für $j \in \{1, \dots, N\}$, so gilt*

$$\exp(A) = \operatorname{diag}(\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_N)) \,.$$

(iii) *Ist $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ in oberer Dreiecksblockgestalt, also von der Form*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Matrizen $A_j \in \mathbb{R}^{N_j \times N_j}$ für $j \in \{1, \dots, k\}$ und $N_j \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{j=1}^{k} N_k = N$ sowie beliebigen Einträgen $*$, so ist $\exp(A)$ von derselben Form mit

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \exp(A_1) & & \tilde{*} \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(A_k) \end{pmatrix}$$

für nicht näher spezifizierte Einträge $\tilde{*}$ (die jedoch alle verschwinden, falls alle Einträge $*$ bei A verschwinden). Insbesondere gilt damit, dass $\exp(A)$ eine obere Dreiecksmatrix ist, falls A eine obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis. Alle drei Eigenschaften folgen aus der Definition der Matrix-Exponentialfunktion. Aussage (i) folgt direkt, für Aussage (ii) nutzt man $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)^\ell = \operatorname{diag}(\lambda_1^\ell, \dots, \lambda_N^\ell)$ für $\ell \in \mathbb{N}_0$, und (iii) sieht man ähnlich (vgl. Übungen). □

Korollar 4.22 (spezielle Rechengesetze mit Matrix-Transformationen)**.**

(i) *Ist $D \in \mathbb{C}^{N\times N}$ eine diagonalisierbare Matrix, d.h. es existiert eine reguläre Matrix $T \in \mathbb{C}^{N\times N}$ und $\lambda_j \in \mathbb{C}$ für $j \in \{1, \dots, N\}$ mit*

$$D = T \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) T^{-1}$$

(dies ist genau dann der Fall, wenn für jeden Eigenwert von D die geometrische Vielfachheit der algebraischen entspricht), so gilt

$$\exp(D) = T \operatorname{diag}(\exp(\lambda_1, \dots, \exp(\lambda_N)) T^{-1} \,.$$

(ii) *Ist $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ die Summe einer diagonalisierbaren Matrix $D \in \mathbb{C}^{N\times N}$ und einer nilpotenten Matrix $A - D \in \mathbb{C}^{N\times N}$, so dass D und A kommutieren, so gilt*

$$\exp(A) = \exp(D) \exp(A - D) \,.$$

(iii) *Ist $J \in \mathbb{C}^{N\times N}$ ein Jordanblock, also eine Matrix der Form*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{C}$, so gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\exp(tJ) = \exp(t\lambda) \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \cdots & \frac{1}{(N-1)!}t^{N-1} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(*also* $\exp(tJ)_{i,j} = \exp(t\lambda)((j-i)!)^{-1}t^{j-i}$ *für* $i \leq j$ *und* 0 *sonst*).

Beweis.

(i) ist eine direkte Konsequenz aus Lemma 4.19 (iii) und Lemma 4.21 (ii).

(ii) folgt sofort aus Lemma 4.19 (iv).

(iii) Mit Induktion über $\ell \in \mathbb{N}$ zeigt man

$$((tJ)^\ell)_{i,j} = t^\ell \lambda^{\ell-j+i} \binom{\ell}{j-i}$$

für $i \leq j$ und $((tJ)^\ell)_{i,j} = 0$ sonst, wofür man wegen

$$((tJ)^{\ell+1})_{i,j} = ((tJ)^\ell)_{i,j-1}(tJ)_{j-1,j} + ((tJ)^\ell)_{i,j}(tJ)_{j,j}$$

nur die Rechenregel

$$\binom{\ell}{j-1-i} + \binom{\ell}{j-i} = \frac{\ell!}{(j-1-i)!\,(\ell-j+1+i)!} + \frac{\ell!}{(j-i)!\,(\ell-j+i)!} = \binom{\ell+1}{j-i}$$

für Binomialkoeffizienten benötigt. Anschließend kann man die Einträge von $\exp(tJ)$ ausrechnen als

$$\begin{aligned} \exp(tJ)_{i,j} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!}((tJ)^\ell)_{i,j} = \sum_{\ell=j-i}^{\infty} \frac{1}{(j-i)!\,(\ell-j+i)!} t^\ell \lambda^{\ell-j+i} \\ &= \frac{1}{(j-i)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^{k+j-i}\lambda^k = \frac{1}{(j-i)!} t^{j-i} \exp(t\lambda) \end{aligned}$$

für $i \leq j$ und $\exp(tJ)_{i,j} = 0$ sonst. Dies zeigt die Behauptung (man hätte auch (ii) verwenden können, muss dann $\exp(tJ - t\lambda \mathbb{1}_{N\times N})$ berechnen, was auf die gleiche Rechnung führt). □

Bemerkung 4.23. *Die Zerlegung einer beliebigen Matrix $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ in einen diagonalisierbaren und einen nilpotenten Anteil ist zwar immer möglich, jedoch kommutieren diese Matrizen im Allgemeinen nicht. Besonders praktisch ist eine solche Zerlegung wie in* (ii) *jedoch, wenn man A diese Zerlegung bereits ansieht. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn A nur einen einzigen Eigenwert $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ besitzt, denn in diesem Fall kommutiert A offensichtlich mit $\lambda_1 \mathbb{1}_{N\times N}$, und der Rest $A - \lambda_1 \mathbb{1}_{N\times N}$ hat als charakteristisches Polynom $p(\lambda) = \lambda^N$ und ist damit nilpotent.*

Korollar 4.24. *Für $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ gelten:*

(i) *Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ die mit algebraischer Vielfachheit gezählten Eigenwerte von A, so sind $\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_N)$ die mit algebraischer Vielfachheit gezählten Eigenwerte von $\exp(A)$.*

(ii) $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Spur}(A))$.

Beweis. Im Folgenden fixieren wir für eine gegebene Matrix $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ eine reguläre Transformationsmatrix $T \in \mathbb{C}^{N\times N}$, so dass

$$A = T\tilde{A}T^{-1}$$

für eine obere Dreiecksmatrix $\tilde{A}$ gilt, deren Diagonaleinträge gerade die mit algebraischer Vielfachheit gezählten Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ von A sind.

(i) Mit Lemma 4.21 (iii) gilt

$$\exp(\tilde{A}) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(\lambda_N) \end{pmatrix}$$

mit nicht näher spezifizierten Einträgen $*$, also hat $\exp(\tilde{A})$ die Eigenwerte $\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_N)$. Die Berechnung von $\exp(A)$ erfolgt nun mithilfe von Lemma 4.19 (iii) als $\exp(A) = T\exp(\tilde{A})T^{-1}$, und da sich hierbei die Eigenwerte nicht ändern, ist die Behauptung gezeigt.

(ii) Da sowohl die Spur als auch die Determinante invariant unter zyklischen Vertauschungen ist, folgt mit Lemma 4.19 (iii) und der Tatsache, dass $\exp(T^{-1}AT)$ eine obere Dreiecksmatrix ist, auch

$$\begin{aligned} \det(\exp(A)) &= \det\left(T^{-1}\exp(A)T\right) \\ &= \det\left(\exp(T^{-1}AT)\right) = \exp\left(\mathrm{Spur}(T^{-1}AT)\right) = \exp(\mathrm{Spur}(A))\,. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.25. *Ist $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ eine quadratische Matrix* über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$*, so kann man die Matrix-Exponentialfunktion* $\exp(tA)$ *über Transformation auf Jordan-Normalform* (*also Blockdiagonalform mit Jordanblöcken*) *mit den bisher gezeigten Aussagen und etwas linearer Algebra berechnen. Das allgemeine Verfahren dafür ist das folgende:*

(1) Berechnung der Eigenwerte von A.

(2) Berechnung der Eigenvektoren sowie Hauptvektoren von A.
Erinnerung: für einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A nennt man die nicht-trivialen Lösungen $v_\lambda \in \mathbb{C}^N$ der Gleichung $(A - \lambda\mathbb{1}_{N\times N})v_\lambda = 0$ Eigenvektoren, und allgemeiner bezeichnet man die Lösungen $w_\lambda \in \mathbb{C}^N$ der Gleichung $(A - \lambda\mathbb{1}_{N\times N})^k w_\lambda = 0$, für die $(A - \lambda\mathbb{1}_{N\times N})^{k-1}w_\lambda \neq 0$ gilt, als Hauptvektoren der Stufe $k \geq 1$. Zusammen spannen sie den Hauptraum zum Eigenwert λ auf, und die Haupträume zu allen Eigenwerten den ganzen $\mathbb{R}^N$.

(3) Aufstellung der regulären Transformationsmatrix $T \in \mathbb{C}^{N\times N}$ *und* Berechnung der Inversen T^{-1}.
Hier folgt man dem Standardverfahren aus der linearen Algebra und bildet die Spalten von T aus N linear unabhängigen Hauptvektoren (*geordnet nach Eigenwerten bzw. Jordanblöcken und Stufe*)*. Man startet dabei für jeden einzelnen Jordanblock mit dem höchsten, noch nicht verwendeten Hauptvektor $v^{(k)}$ zu diesem Eigenwert und wählt als die niedrigeren Hauptvektoren $v^{(\ell)} = (A - \lambda\mathbb{1}_{N\times N})^{k-\ell}v^{(k)}$ für $\ell \in \{1, \dots, k-1\}$.*

(4) *Die Matrix $T^{-1}AT =: J$ ist dann in* Jordan-Normalform.

(5) Berechnung von $\exp(tJ)$ *mithilfe von Lemma* 4.21 (iii) (*mit* $* = 0$) *sowie Korollar* 4.22 (iii).

(6) Bildung von $\exp(tA)$ *mit Lemma* 4.19 (iii) *als* $\exp(tA) = T\exp(tJ)T^{-1}$.

Zu beachten ist, dass die Eigenwerte sowie Eigenvektoren durchaus komplexwertig sein können (andernfalls ist im Allgeminen nur die Transformation auf eine reelle Jordan-Normalform möglich), jedoch hat $\exp(tA)$ *am Ende in jedem Fall nur reelle Einträge.*

Beispiel 4.26. *Wir überlegen uns nun, wie das* Matrix-Exponential für reelle Jordan-Normalformen auf $\mathbb{R}^{2\times 2}$ *(die man erhält, wenn man ausschließlich reelle Basistransformationen zulässt) aussieht. Es können die folgenden Fälle auftreten:*

(i) *Es gibt zwei reelle Eigenwerte* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *mit zwei linear unabhängigen Eigenvektoren (also entweder* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *oder* $\lambda_1 = \lambda_2$ *mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit gleich* 2*). In diesem Fall gilt*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \textit{und damit} \qquad \exp(tJ) = \begin{pmatrix} \exp(t\lambda_1) & 0 \\ 0 & \exp(t\lambda_2) \end{pmatrix}$$

nach Lemma 4.21 (ii)*.*

(ii) *Es gibt einen reellen Eigenwert* $\lambda \in \mathbb{R}$ *mit algebraischer Vielfachheit* 2 *und geometrischer Vielfachheit* 1*. In diesem Fall gilt*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \textit{und damit} \qquad \exp(tJ) = \exp(t\lambda) \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nach Korollar 4.22 (iii)*.*

(iii) *Es gibt keinen reellen Eigenwert, sondern ein komplex konjugiertes Eigenwertpaar* $\lambda \pm \mathrm{i}\,\mu$ *mit* $\lambda \in \mathbb{R}$ *und* $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*. In diesem Fall gilt also*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix}$$

und zur Bestimmung von $\exp(tJ)$ *transformieren wir nun auf die komplexe Jordan-Normalform. Eigenvektoren zu* $\lambda \pm \mathrm{i}\,\mu$ *sind* $(1, \pm\mathrm{i})^T$*, und damit erhalten wir als Transformationsmatrix*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \qquad \textit{mit Inverser} \qquad T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Nun ist $T^{-1}JT = \operatorname{diag}(\lambda + \mathrm{i}\,\mu, \lambda - \mathrm{i}\,\mu)$ *die komplexe Jordan-Normalform zu* J*, und mit Lemma* 4.19 (iii) *und* $\exp(t(\lambda \pm \mathrm{i}\,\mu)) = \exp(t\lambda)(\cos(t\mu) \pm i\sin(t\mu))$ *berechnen wir*

$$\begin{aligned} \exp(tJ) &= T \exp\big(t\operatorname{diag}(\lambda + \mathrm{i}\,\mu, \lambda + \mathrm{i}\,\mu)\big) T^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(t(\lambda + \mathrm{i}\,\mu)) & 0 \\ 0 & \exp(t(\lambda - \mathrm{i}\,\mu)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &= \exp(t\lambda) \begin{pmatrix} \cos(t\mu) & \sin(t\mu) \\ -\sin(t\mu) & \cos(t\mu) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mithilfe der Transformation auf Jordan-Normalform (wie oben beschrieben) und den Bausteinen der Matrix-Exponentialfunktion für Jordanblöcke lässt sich das Matrix-Exponential auch für größere quadratische Matrizen relativ einfach berechnen.

Beispiel 4.27. *Wir wollen nun das Matrix-Exponential für die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Die wesentlichen Zwischenschritte dafür sind die folgenden: Da die Matrix bereits in oberer Dreiecksform ist, können wir den einfachen Eigenwert 1 *und den doppelten Eigenwert* 2 *direkt aus der*

Diagonale ablesen, ohne das charakteristische Polynom zu berechnen. Der Eigenraum zum Eigenwert 1 *wird vom Vektor* $v_1 = (1,0,0)^T$ *aufgespannt. Der Eigenraum zum Eigenwert* 2 *wird vom Vektor* $v_2 = (2,1,0)^T$ *aufgespannt (die geometrische Vielfachheit ist also* 1*), und um den Hauptraum zum Eigenwert* 2 *zu bekommen, kann man beispielsweise noch den Vektor* $v_3 = (1,0,1)^T$ *als Lösung von*

$$(A - 2\mathbb{1}_{3\times 3})^2 v = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0$$

hinzunehmen (es gilt auch $v_2 = (A - 2\mathbb{1}_{3\times 3})v_3$*). Damit wissen wir prinzipiell schon, wie die Jordan-Normalform zu* A *aussieht, wir brauchen für die Bildung von* $\exp(tA)$ *jedoch auch die dazugehörige Basistransformation, die aus den obigen drei Vektoren als Spalten gewonnen wird:*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{mit Inverser} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und mit dieser Matrix-Transformation erhalten wir die Jordan-Normalform von A *als*

$$J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für die Jordan-Normalform von A *können wir* $\exp(tJ)$ *mithilfe von Lemma* 4.21 (iii) *und dem letzten Beispiel bestimmen, und* $\exp(tA)$ *erhalten wir dann über die Rücktransformation*

$$\begin{aligned} \exp(tA) = T\exp(tJ)T^{-1} &= T \begin{pmatrix} \exp(t) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(2t) & t\exp(2t) \\ 0 & 0 & \exp(2t) \end{pmatrix} T^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \exp(t) & -2\exp(t) + 2\exp(2t) & -\exp(t) + (2t+1)\exp(2t) \\ 0 & \exp(2t) & t\exp(2t) \\ 0 & 0 & \exp(2t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zur Probe sollte man hier noch einmal überprüfen, dass die drei Spalten tatsächlich Lösungen des linearen Systems sind, die bei $t = 0$ *in den kanonischen Einheitsvektoren starten.*

Zusammenfassend haben wir nun für das homogene System von linearen Differentialgleichungen

$$u' = Au$$

mit konstanter Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und Startzeit $t_0 \in \mathbb{R}$ die Übergangsmatrix $\Psi(t,t_0) = \exp((t-t_0)A)$ gefunden und können diese (wenn auch etwas aufwändig) mithilfe der Transformation auf Jordan-Normalform auch konkret berechnen.

Manchmal ist man weniger an der expliziten Form der Übergangsmatrix interessiert, sondern möchte lediglich die *Struktur* der Lösungen bzw. des Fundamentalsystems kennen. Im letzten Beispiel fällt etwa auf, dass die einzelnen Spalten von $\exp(tA)$ Summen aus $\exp(\lambda_1 t)v_1$ bzw. $\exp(\lambda_2 t)v_2(t)$ sind, mit v_1 einem Vektor (genau dem Eigenvektor zum Eigenwert λ_1) und $v_2(t)$ einem Vektor mit Komponenten, die Polynome höchstens ersten Grades sind. Da wir aus Satz 4.10 bereits wissen, dass jede andere Übergangsmatrix M als $\Psi(t,t_0)T$ für eine geeignete, reguläre (zeitunabhängige) Matrix $T \in \mathbb{R}^{N\times N}$ dargestellt werden kann, gilt diese spezielle Struktur also auch für jedes andere Fundamentalsystem. Dies ist nicht etwa Zufall, sondern allgemeiner gilt die folgende Aussage über die Feinstruktur jeden Fundamentalsystems eines homogenen Systems von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

Satz 4.28 (algebraische Feinstruktur des Lösungsraum der homogenen Gleichung)**.** *Sei* $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ *mit* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *den paarweise verschiedenen reellen Eigenwerten sowie* $\lambda_{n+1} \pm \mathrm{i}\,\mu_{n+1}, \ldots, \lambda_m \pm \mathrm{i}\,\mu_m$ *den*

paarweise verschiedenen komplex konjugiert Eigenwertpaaren (mit $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ und $\mu_{n+1}, \dots, \mu_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$). Dann lässt sich der Lösungsraum der homogenen Gleichung $u' = Au$ als direkte Summe

$$L_{\lambda_1} \oplus \dots L_{\lambda_n} \oplus L_{\lambda_{n+1},\mu_{n+1}} \oplus \dots \oplus L_{\lambda_m,\mu_m} \tag{4.4}$$

für lineare Unterräume $L_{\lambda_1}, \dots, L_{\lambda_n}, L_{\lambda_{n+1},\mu_{n+1}}, \dots, L_{\lambda_m,\mu_m}$ darstellen (d.h. für jede Lösung u findet man aus jedem dieser Unterräume eine eindeutiges Element u_i, so dass $u = \sum_{i=1}^m u_i$ gilt). Ferner gilt für diese Unterräume:

(i) *Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A mit algebraischer Vielfachheit $\ell \in \mathbb{N}$, so hat der zugehörige Unterraum L_λ die Dimension ℓ und besitzt eine Basis aus Funktionen der Form*

$$\exp(\lambda t)p_0\,, \quad \dots \quad \exp(\lambda t)p_{\ell-1}(t)\,,$$

wobei $p_j \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ eine Funktion ist, deren Komponenten Polynome vom Grad höchstens j sind, für $j \in \{0, 1, \dots, \ell-1\}$. Ist die geometrische Vielfachheit von λ ebenfalls ℓ, so sind alle Funktionen $p_0, p_1, \dots, p_{\ell-1}$ tatsächlich konstante Vektoren in $\mathbb{R}^N$ (die gerade den Eigenraum zu λ aufspannen).

(ii) *Ist $\lambda \pm \mathrm{i}\,\mu$ (mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) ein komplex konjugiertes Eigenwertpaar von A mit algebraischer Vielfachheit $\ell \in \mathbb{N}$, so hat der zugehörige Unterraum $L_{\lambda,\mu}$ die Dimension 2ℓ und besitzt eine Basis aus Funktionen der Form*

$$\begin{aligned} &\exp(\lambda t)\big[\cos(\mu t)q_0 - \sin(\mu t)\tilde{q}_0\big]\,, \quad \dots \quad \exp(\lambda t)\big[\cos(\mu t)q_{\ell-1}(t) - \sin(\mu t)\tilde{q}_{\ell-1}(t)\big]\,, \\ &\exp(\lambda t)\big[\sin(\mu t)r_0 + \cos(\mu t)\tilde{r}_0\big]\,, \quad \dots \quad \exp(\lambda t)\big[\sin(\mu t)r_{\ell-1}(t) + \cos(\mu t)\tilde{r}_{\ell-1}(t)\big]\,, \end{aligned}$$

wobei $q_j, \tilde{q}_j, r_j, \tilde{r}_j \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ Funktionen sind, deren Komponenten Polynome vom Grad höchstens j sind, für $j \in \{0, 1, \dots, \ell-1\}$. Ist die geometrische Vielfachheit von λ ebenfalls ℓ, so sind alle diese Funktionen tatsächlich konstante Vektoren in $\mathbb{R}^N$.

Insgesamt erhält man mithilfe der (mit Vielfachheiten gezählten) N (komplexen) Eigenwerte der Matrix A also N linear unabhängige Lösungen, d.h. ein Fundamentalsystem, für die Gleichung $u' = Au$.

Beweis. Ohne Einschränkung dürfen wir zunächst annehmen, dass die Matrix A bereits in der reellen Jordan-Normalform

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix}$$

vorliegt, mit reellen Jordan-Blöcken $J_i \in \mathbb{R}^{N_i \times N_i}$ und $\sum_{i=1}^k N_i = N$. Ist dies nicht der Fall, so bestimmen wir zunächst eine reguläre Transformationsmatrix $T \in \mathbb{R}^{N \times N}$ mit $J = T^{-1}AT$ und betrachten anstelle von Lösungen u für die Gleichung $u' = Au$ die Lösungen v für die transformierte Gleichung $v' = Jv$. Hat man dann ein Fundamentalsystem $v_1, \dots, v_N$ für diese transformierte Gleichung aufgestellt, so gewinnt man mit $Tv_1, \dots Tv_N$ ein Fundamentalsystem für die ursprüngliche Gleichung zurück: wegen

$$(Tv_j)' = TJv_j = TJT^{-1}(Tv_j) = A(Tv_j)$$

gilt die Lösungseigenschaft, und nach Konstruktion sind diese Lösungen auch linear unabhängig. Da sich bei dieser Transformation auch nichts an der behaupteten Struktur der Lösung ändert, nehmen wir im Folgenden also $A = J$ an.

Mit Lemma 4.21 (iii) gilt nun

$$\exp(tJ) = \begin{pmatrix} \exp(tJ_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(tJ_k) \end{pmatrix}\,,$$

und die Spalten dieser Matrix stellen genau ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $u' = Ju$ dar. Um zu sehen, dass die Spalten genau von der behaupteten Form sind, unterscheiden wir nun die

Fälle eines reellen bzw. eines komplexen Eigenwerts. Für einen reellen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ der algebraischen Vielfachheit ℓ haben die zugehörigen (maximal ℓ) Jordanblöcke J_i jeweils die Form

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

(von Dimensionen $N_i(\lambda) \in \mathbb{N}$ mit $\sum N_i(\lambda) = \ell$). Falls die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts ebenfalls ℓ ist, so handelt es sich dabei um insgesamt ℓ Jordanblöcke der Dimension 1. Die Behauptung (i) folgt nun direkt aus Korollar 4.22 (iii). Für ein komplex konjugiertes Eigenwertpaar $\lambda \pm \mathrm{i}\,\mu$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ der algebraischen Vielfachheit ℓ haben die zugehörigen reellen Jordanblöcke J_i jeweils die Form

$$J_i = \begin{pmatrix} D_{\lambda,\mu} & \mathbb{1}_{2\times 2} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \mathbb{1}_{2\times 2} \\ 0 & & & D_{\lambda,\mu} \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad D_{\lambda,\mu} := \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix}$$

(von Dimensionen $N_i(\lambda) \in 2\mathbb{N}$ mit $\sum N_i(\lambda) = 2\ell$). Falls die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte $\lambda \pm \mathrm{i}\,\mu$ ebenfalls ℓ ist, so handelt es sich dabei um insgesamt ℓ Jordanblöcke $D_{\lambda,\mu}$ der Dimension 2×2. Die Behauptung (ii) folgt nun mit einer analogen Argumentation wie im Fall eines reellen Eigenwertes, basierend auf der Berechnung des Matrix-Exponentials wie in Korollar 4.22 (iii), nun aber mit Matrizen der Dimension 2×2 auf Diagonale und oberer Nebendiagonale, und der expliziten Formel für $\exp(tD_{\lambda,\mu})$ aus Beispiel 4.26 (iii). □

Bemerkung 4.29. *Als direkte Folgerung dieses Satzes ergibt sich nun auch die Struktur des Lösungsraums für lineare, homogene Gleichungen der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ mit konstanten Koeffizienten, also für die Gleichung*

$$u^{(k)} + a_{k-1}u^{(k-1)} + \ldots + a_1 u' + a_0 u = 0 \qquad \text{in } I \subset \mathbb{R} \tag{4.5}$$

mit $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$, wie in Satz 2.8 behauptet wurde.

Beweis. Tatsächlich ist die Gleichung (4.5) nach Satz 1.16 äquivalent zum linearen System

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0 & \ldots & -a_{k-2} & -a_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} =: A \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} . \tag{4.6}$$

Mit der Entwicklung nach der letzten Zeile sieht man leicht, dass das charakteristische Polynom von A genau dem charakteristischen Polynom der linearen Gleichung (4.5) entspricht (eventuell bis auf Vorzeichen). Daher sind die (komplexen) Eigenwerte der Matrix A also genau die (komplexen) Nullstellen des charakteristischen Polynoms zu (4.5), mit Vielfachheiten. Um auf die Struktur des Lösungsraums zu (4.5) zu kommen, wendet man nun Satz 4.28 an und bemerkt, dass die Lösungen der Gleichung (4.5) bijektiv auf die Lösungen des Systems (4.6) abgebildet werden über die Abbildung

$$F\colon \{u \in C^k(I, \mathbb{R}) \text{ löst } (4.5)\} \to \{u \in C^1(I, \mathbb{R}^k) \text{ löst } (4.6)\}$$

mit

$$F(u) := (u, u', \ldots, u^{(k-1)}) \qquad \text{und} \qquad F^{-1}(u_1, \ldots, u_k) = u_1 .$$

Daher gilt eine Zerlegung des Lösungsraums zur Gleichung (4.5) wie in (4.4), und die jeweiligen Unterräume zu den einzelnen Nullstellen des charakteristischen Polynoms werden von Funktionen

$$\exp(\lambda t)\,, \quad t\exp(\lambda t)\,, \quad \ldots \quad , \quad t^{\ell-1}\exp(\lambda t)$$

im Fall einer reellen Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. von Funktionen

$$\begin{aligned} &\exp(\lambda t)\cos(\mu t)\,, \quad t\exp(\lambda t)\cos(\mu t)\,, \quad \dots \quad , \quad t^{\ell-1}\exp(\lambda t)\cos(\mu t)\,, \\ &\exp(\lambda t)\sin(\mu t)\,, \quad t\exp(\lambda t)\sin(\mu t)\,, \quad \dots \quad , \quad t^{\ell-1}\exp(\lambda t)\sin(\mu t) \end{aligned}$$

im Fall einer komplexen Nullstelle $\lambda \pm \mathrm{i}\,\mu$ (jeweils mit Vielfachheit ℓ) erzeugt, da dies auch genau für die Komponente u_1 aller Lösungen zu (4.6) aus dem Unterraum L_λ bzw. $L_{\lambda,\mu}$ zutrifft und es aus Dimensionsgründen insgesamt ℓ bzw. 2ℓ Stück sein müssen. □

Bemerkung 4.30. *Mittels Variation der Konstanten (siehe Satz 4.15) haben wir in diesem Kapitel nun ein vollständiges Verfahren zur Ermittlung von Lösungen für (homogene und inhomogene) Systeme*

$$u' = Au + b(t)$$

mit konstanter Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und $b \in C(I, \mathbb{R}^N)$ entwickelt.

4.3 Lineare Systeme mit analytischen Koeffizienten

Abschließend gehen wir noch kurz auf Systeme linearer Differentialgleichungen

$$u' = A(t)u$$

mit nicht-konstanten Koeffizienten (und gegebenenfalls einer Inhomogenität) ein. Zwar gibt es für den Fall der stetigen Koeffizienten $A \in C(I, \mathbb{R}^{N\times N})$ kein allgemeines Lösungsverfahren für die Bestimmung des Lösungsraums des homogenen Systems, jedoch kann man zumindest für analytische Koeffizienten, also solche mit einer Potenzreihenentwicklung

$$A(t) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j (t - t_0)^j$$

mit Entwicklungspunkt $t_0 \in I$, Konvergenzradius $R(t_0)$ sowie matrix-wertigen Koeffizienten $(A_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{R}^{N\times N}$, Lösungen mithilfe des Potenzreihenansatzes aus Kapitel 2.5 finden und einige ihrer Eigenschaften untersuchen.

Satz 4.31 (Analytizität der allgemeinen Lösung)**.** *Seien $N \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A \in C^\omega(I, \mathbb{R}^{N\times N})$ analytische Koeffizienten. Für jedes $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ besitzt das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} u' &= A(t)u \\ u(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

eine analytische Lösung $u \in C^\omega(I, \mathbb{R}^N)$. Diese lässt sich um t_0 als Potenzreihe

$$u(t) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j (t - t_0)^j$$

mit geeigneten Koeffizienten $(x_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{R}^N$ schreiben, und der Konvergenzradius ist mindestens so groß wie der Konvergenzradius $R(t_0)$ der Potenzreihenentwicklung von $A(t)$ um t_0.

Beweis. Schritt 1: Herleitung einer Rekursionsformel für die Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$. Wir nehmen zunächst an, dass u eine Potenzreihenentwicklung zulässt und differenzieren formal

$$u'(t) = \sum_{j=1}^{\infty} j x_j (t - t_0)^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) x_{j+1} (t - t_0)^j\,.$$

Mit der Cauchy-Produktformel berechnen wir außerdem formal

$$A(t)u(t) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} A_k(t-t_0)^k\Big)\Big(\sum_{\ell=0}^{\infty} x_\ell(t-t_0)^\ell\Big) = \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{m=0}^{j} A_{j-m}x_m\Big)(t-t_0)^j\,.$$

Vergleichen wir die Koeffizienten, so muss bei gegebenem Startwert x_0 also die Rekursionsformel

$$x_{j+1} = \frac{1}{j+1}\sum_{m=0}^{j} A_{j-m}x_m \qquad \text{für alle } j \in \mathbb{N}_0 \text{ gelten}\,.$$

Schritt 2: Beweis der Konvergenz. Um die obigen Rechnungen und insbesondere die gliedweise Differentiation zu rechtfertigen, zeigen wir nun noch, dass die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} x_j(t-t_0)^j \qquad \text{für alle } t \text{ mit } |t-t_0| < R(t_0)$$

absolut konvergiert (und damit ist ihr Konvergenzradius also mindestens $R(t_0)$). Wir betrachten im folgenden also ein solches t und wählen R mit $|t-t_0| < R < R(t_0)$. Wir beobachten zunächst, dass die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} A_jR^j$ nach Annahme konvergent ist. Damit ist $(A_jR^j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}^{N\times N}$ (wieder ausgestattet mit der Operatornorm), und folglich gibt es eine Konstante $M(R) \geq 0$ mit

$$\|A_j\| \leq M(R)R^{-j} \qquad \text{für alle } j \in \mathbb{N}_0\,.$$

Für die Koeffizienten $(x_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ folgt damit aufgrund der Rekursionsformel zunächst

$$|x_{k+1}| \leq \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\|A_{k-j}\||x_j| \leq \frac{M(R)}{k+1}\sum_{j=0}^{k} R^{j-k}|x_j| \tag{4.7}$$

für $k \in \mathbb{N}_0$, und dass es hier eine negative R-Potenz gibt, ist entscheidend. Mit Induktion zeigen wir nämlich

$$\sum_{j=0}^{k} x_jR^j \leq \frac{|x_0|}{k!}\prod_{j=0}^{k}(j+M(R)R) \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}_0\,. \tag{4.8}$$

Für $k=0$ ist diese Aussage trivial, und für $k \in \mathbb{N}_0$ verifizieren wir mit der Rekursionsformel

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k+1} x_jR^j &= \sum_{j=0}^{k} x_jR^j + x_{k+1}R^{k+1}\\
&\leq \sum_{j=0}^{k} x_jR^j + \frac{M(R)}{k+1}\sum_{j=0}^{k} R^{j-k}|x_j|R^{k+1} = \Big(1+\frac{M(R)}{k+1}R\Big)\sum_{j=0}^{k} x_jR^j\\
&\leq \Big(1+\frac{M(R)}{k+1}R\Big)\frac{|x_0|}{k!}\prod_{j=0}^{k}(j+M(R)R) = \frac{|x_0|}{(k+1)!}\prod_{j=0}^{k+1}(j+M(R)R)\,.
\end{aligned}$$

Mit (4.7) und (4.8) finden wir nun also insgesamt die Abschätzung

$$|x_{k+1}| \leq \frac{M(R)}{R^k(k+1)}\sum_{j=0}^{k} R^j|x_j| \leq |x_0|\frac{M(R)}{R^k(k+1)!}\prod_{j=0}^{k}(j+M(R)R) =: y_{k+1}\,.$$

Setzen wir $y_0 := |x_0|$, so folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} y_j|t-t_0|^j$ wegen $|t-t_0| < R$ nach dem Quotientenkriterium

$$\lim_{j\to\infty}\frac{y_{j+1}|t-t_0|^{j+1}}{y_j|t-t_0|^j} = \lim_{j\to\infty}\frac{j+1+M(R)R}{(j+1)}\frac{|t-t_0|}{R} < 1\,.$$

Mit dem Majorantenkriterium (beachte $|x_j(t-t_0)^j| \leq y_j|t-t_0|^j$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$) gilt daher die gewünschte Konvergenz der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} x_j(t-t_0)^j$ für alle t mit $|t-t_0| < R(t_0)$ und der Satz ist bewiesen. □

Kapitel 5

Autonome Differentialgleichungen

In diesem Kapitel studieren wir die Klasse der autonomen gewöhnlichen Differentialgleichungen genauer, wieder mit der Beschränkung auf explizite Gleichungen erster Ordnung, also

$$u' = f(u)$$

mit einer Strukturfunktion $f \in C(D', \mathbb{R}^N)$ (wobei D' eine offene Menge in $\mathbb{R}^N$ ist), die nicht explizit von der Zeitvariable t abhängt. Unter diesen Voraussetzungen wissen wir mit dem Satz von Peano bereits die Existenz lokaler Lösungen. Gilt zudem sogar lokale Lipschitz-Stetigkeit von f, so folgt mit dem Satz von Picard–Lindelöf auch die Eindeutigkeit von Lösungen. In diesem Fall haben wir auch schon Aussagen über das maximale Existenzintervall von Lösungen kennengelernt und das grundsätzliche Randverhalten studiert. Hier untersuchen wir zunächst die Wertebereiche von Lösungen im Fall autonomer Gleichungen genauer, in Abhängigkeit vom Anfangsdatum, und spezialisieren uns dann auf ebene (lienare und nichtlineare) autonome Gleichungen, also den Fall $N = 2$.

5.1 Allgemeine Theorie

Für autonome Gleichungen haben wir in Lemma 1.11 gezeigt, dass die Lösungseigenschaft unter Translationen in der Zeitvariable invariant bleibt. Dies bedeutet, dass mit einer Lösung u zu $u' = f(u)$ mit $u(t_0) = x_0$ die Funktion $v(t) := u(t - s)$ für festes $s \in \mathbb{R}$ dieselbe Gleichung löst, mit Anfangswert $v(t_0 + s) = x_0$. Im Fall, dass wir eine Lipschitz-stetige Strukturfunktion betrachten, bedeutet dies, dass die charakteristische Funktion $t \mapsto u(t; t_0, x_0)$, also die eindeutige maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u' &= f(t, u) \\ u(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

(siehe Definition 3.35), und das zugehörige maximale Existenzintervall $I_{\max}(t_0, x_0)$ eine sehr einfache Abhängigkeit von der Anfangszeit t_0 haben: für alle $t_0, \tilde{t}_0$ und alle $x_0 \in \mathbb{R}^N$ gelten

$$u(t; \tilde{t}_0, x_0) = u(t - \tilde{t}_0 + t_0; t_0, x_0) \qquad \text{mit } I_{\max}(\tilde{t}_0, x_0) = I_{\max}(t_0, x_0) + \tilde{t}_0 - t_0\,. \tag{5.1}$$

Kennt man daher für einen *gegebenen Anfangswert* x_0 die maximale Lösung des Anfangswertproblems für eine *beliebige Anfangszeit* t_0, so erhält man die Lösung des Anfangswertproblems für jede andere Anfangszeit durch obige Translation, und wir können uns daher auf den Fall $t_0 = 0$ konzentrieren, studieren also nur die Abbildung

$$(t, x_0) \mapsto u(t; 0, x_0) =: u(t; x_0)$$

für $x_0 \in D'$ und $t \in I_{\max}(0, x_0) =: I_{\max}(x_0) = (I^-(x_0), I^+(x_0))$. Wir halten nun einige Eigenschaften von $u(t; x_0)$ fest, die sich direkt aus Proposition 3.37 über die Flusseigenschaften der charakteristischen Funktion ergeben.

Proposition 5.1 (Flusseigenschaften für autonome Gleichungen)**.** *Seien $N \in \mathbb{N}$, $D' \subset \mathbb{R}^N$ offen und $f\colon D' \to \mathbb{R}^N$ eine Lipschitz-stetige Funktion. Für beliebiges $x_0 \in D'$ gelten*

(i) $u(0; x_0) = x_0$,

(ii) $u(t+s; x_0) = u(s; u(t; x_0))$ *für* $t, t+s \in I_{\max}(x_0)$,

(iii) $x_0 = u(-t; u(t; x_0))$ *für* $t \in I_{\max}(x_0)$, *d.h. die Abbildung* $x_0 \mapsto u(t, x_0)$ *ist invertierbar mit Inverser* $x_0 \mapsto u(-t; x_0)$.

Beweis. Aussage (i) gilt nach Definition von $t \mapsto u(t; x_0)$ als Lösung des Anfangswertproblems $u' = f(u)$ mit $u(0) = x_0$. Für die Aussage (ii) folgern wir zunächst aus Proposition 3.37 und dann der Translationseigenschaft (5.1)

$$\begin{aligned} u(t+s; x_0) &\equiv u(t+s; 0, x_0) = u(t+s; t, u(t; 0, x_0)) \\ &= u(s; 0, u(t; 0, x_0)) \equiv u(s; u(t; x_0)) \,, \end{aligned}$$

und Aussage (iii) folgt schließlich aus (ii) mit $s = -t$ in Kombination mit (i). □

Definition 5.2. *Seien $N \in \mathbb{N}$, $D' \subset \mathbb{R}^N$ offen und $f\colon D' \to \mathbb{R}^N$ Lipschitz-stetig.*

(i) *Für $x_0 \in D'$ heißen die Mengen*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(x_0) &:= \big\{ u(t; x_0) \colon t \in \big(I^-(x_0), I^+(x_0)\big) \big\} \\ \mathcal{O}^+(x_0) &:= \big\{ u(t; x_0) \colon t \in \big[0, I^+(x_0)\big) \big\} \\ \mathcal{O}^-(x_0) &:= \big\{ u(t; x_0) \colon t \in \big(I^-(x_0), 0\big] \big\} \end{aligned}$$

Orbit (*oder* Trajektorie *oder* Bahn) *bzw.* positiver *und* negativer Halborbit (*oder* Halbtrajektorie *oder* Halbbahn) *von $u' = f(u)$ durch x_0.*

(ii) *Die Nullstellen des Vektorfeldes f in D' nennt man* singuläre Punkte *und bezeichnet sie im Zusammenhang mit der autonomen Differentialgleichungen $u' = f(u)$ auch als die* Ruhelagen (*oder* Gleichgewichtslagen) *des Systems. Alle anderen Punkte aus D' nennt man die* regulären Punkte *des Vektorfeldes f.*

(iii) *Ein Punkt $x^* \in D'$ heißt ein ω-*Grenzpunkt *zu $x_0 \in D'$, falls es eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $[0, \infty)$ gibt mit*

$$\lim_{k\to\infty} t_k = \infty \qquad \textit{und} \qquad x^* = \lim_{k\to\infty} u(t_k; x_0) \,.$$

*Die Menge $\omega(x_0)$ aller ω-Grenzpunkt zu x_0 bezeichnet man als die ω-*Grenzmenge *zu x_0. Entsprechend nennt man einen Punkt $x_* \in D'$ einen α-*Grenzpunkt *zu $x_0 \in D'$, falls es eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $(-\infty, 0]$ gibt mit*

$$\lim_{k\to\infty} t_k = -\infty \qquad \textit{und} \qquad x_* = \lim_{k\to\infty} u(t_k; x_0) \,.$$

*Die Menge $\alpha(x_0)$ aller α-Grenzpunkt zu x_0 bezeichnet man als die α-*Grenzmenge *zu x_0.*

Wir werden im Folgenden die eben eingeführten Punkte und Mengen genauer untersuchen und charakterisieren. Als Konsequenz aus Satz 3.21 zum Randverhalten der maximalen Lösung und Korollar 3.23 halten wir zunächst fest:

Satz 5.3 (Randverhalten von Flüssen)**.** *Seien $N \in \mathbb{N}$, $D' \subset \mathbb{R}^N$ offen und $f\colon D' \to \mathbb{R}^N$ Lipschitz-stetig. Für $x_0 \in D'$ gelten:*

(i) *Ist K eine kompakte Menge in $\mathbb{R} \times D'$, so gibt es ein kompaktes Intervall $[T_K^-(x_0), T_K^+(x_0)] \subset (I^-(x_0), I^+(x_0))$ mit*

$$(t, u(t)) \notin K \qquad \textit{für alle } t \in (I^-(x_0), I^+(x_0)) \setminus [T_K^-(x_0), T_K^+(x_0)] \,.$$

(ii) *Ist $I^+(x_0)$ bzw. $I^-(x_0)$ endlich, so ist $\mathcal{O}^+(x_0)$ bzw. $\mathcal{O}^-(x_0)$ unbeschränkt oder der Rand $\partial D'$ von D' ist nicht-leer und es gilt*

$$\operatorname{dist}\big(u(t;x_0),\partial D'\big) \to 0 \qquad \text{bei } t \nearrow I^+(x_0) \text{ bzw. } t \searrow I^-(x_0)\,.$$

In jedem Fall gilt hier also

$$\min\big\{\operatorname{dist}\big(u(t;x_0),\partial D'\big),(1+|u(t;x_0)|)^{-1}\big\} \to 0 \qquad \text{bei } t \nearrow I^+(x_0) \text{ bzw. } t \searrow I^-(x_0)\,.$$

(iii) *Ist $\mathcal{O}^+(x_0)$ bzw. $\mathcal{O}^-(x_0)$ in einer kompakten Menge $K' \subset D'$ enthalten, so gilt $I^+(x_0) = \infty$ bzw. $I^-(x_0) = -\infty$.*

Beweis. Die Aussagen (i) und (ii) folgen direkt aus Satz 3.21 für den Spezialfall einer autonomen Gleichung und mit einem Gebiet D von der Form $\mathbb{R} \times D'$, wobei hier insbesondere

$$\partial(\mathbb{R}\times D') = \mathbb{R}\times\partial D' \quad \text{und} \quad \operatorname{dist}\big((t,u(t;x_0)),\mathbb{R}\times\partial D')\big) = \operatorname{dist}\big(u(t;x_0),\partial D'\big)$$

gelten. Aussage (iii) folgt schließlich direkt aus Korollar 3.23. □

Beispiele 5.4.

(i) *Für die skalare Differentialgleichung*

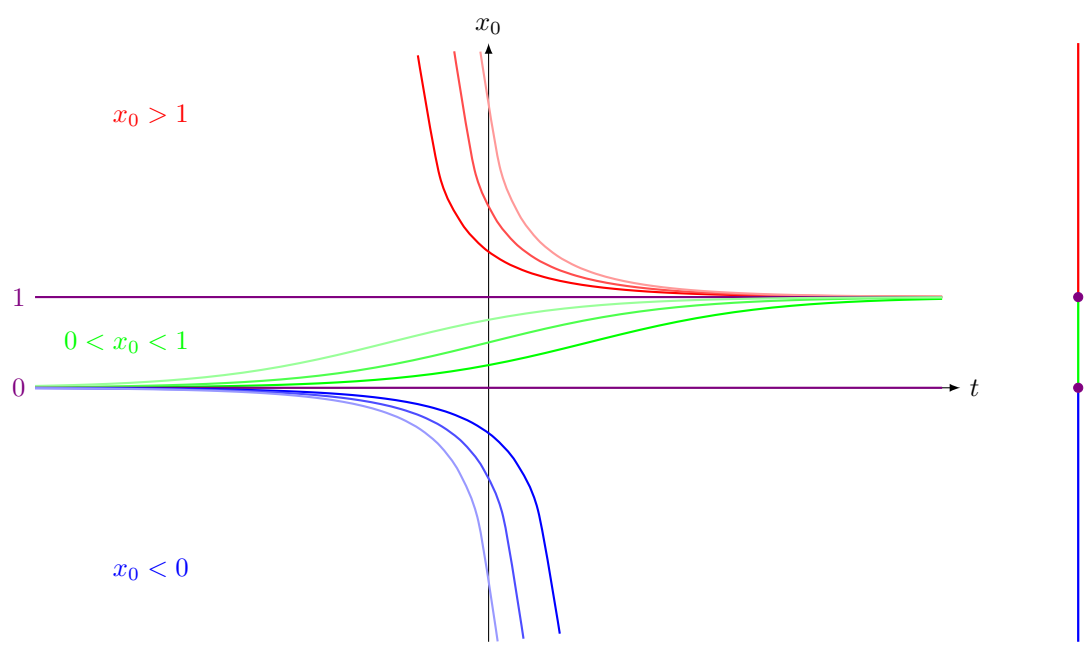
$$u' = u - u^2\,,$$

also einer speziellen Bernoulli-Gleichung, können wir mithilfe einer Variablensubstitution (wie in Beispiel 2.24 (iii) erklärt) eine explizite Lösungsformel bestimmen. Ist $u \neq 0$, so gilt nämlich für $v = u^{-1}$ die lineare Gleichung $v' = -v + 1$, die für das Anfangswertproblem mit $v(0) = x_0^{-1}$ für $x_0 \neq 0$ die Lösung

$$v(t) = 1 + (x_0^{-1} - 1)\exp(-t)$$

besitzt. Mit der Rücktransformation $u = v^{-1}$ und der Berücksichtigung der konstanten Lösung $u \equiv 0$ erhalten wir für $x_0 \in \mathbb{R}$ also die allgemeine Lösung

$$u(t;x_0) = \frac{x_0}{x_0 + (1-x_0)\exp(-t)}\,.$$



Für die maximalen Existenzintervalle, Orbits und Grenzmengen haben wir dabei in Abhängigkeit von x_0:

- *für $x_0 < 0$ gelten $I_{\max}(x_0) = (-\infty, \log(1 - x_0^{-1}))$ und $\mathcal{O}(x_0) = (-\infty, 0)$;*
- *$x_0 = 0$ ist eine Ruhelage der Gleichung, also $I_{\max}(x_0) = \mathbb{R}$ und $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0\}$;*
- *für $x_0 \in (0,1)$ gelten $I_{\max}(x_0) = \mathbb{R}$ und $\mathcal{O}(x_0) = (0,1)$;*
- *$x_0 = 1$ ist ebenfalls eine Ruhelage der Gleichung, also $I_{\max}(x_0) = \mathbb{R}$ und $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0\}$;*
- *für $x_0 > 1$ gelten $I_{\max}(x_0) = (\log(1 - x_0^{-1}), \infty)$ und $\mathcal{O}(x_0) = (1, \infty)$.*

Die Bestimmung der Grenzmengen ist hier sehr einfach, da die Lösungen für die Limiten $t \to \pm\infty$ (so man diesen Limes betrachten kann) entweder konvergieren oder divergieren. Insgesamt haben wir

$$\alpha(x_0) = \begin{cases} \{0\} & \text{für } x_0 < 1 \\ \{1\} & \text{für } x_0 = 1 \\ \emptyset & \text{für } x_0 > 1 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \omega(x_0) = \begin{cases} \emptyset & \text{für } x_0 < 0 \\ \{0\} & \text{für } x_0 = 0 \\ \{1\} & \text{für } x_0 > 0 \end{cases} .$$

(ii) *Das zweidimensionale System*

$$\begin{cases} u_1' = & u_2 \\ u_2' = & -u_1 \end{cases}$$

(vgl. Kapitel 1.4) besitzt für $x_0 \in \mathbb{R}^2$ die allgemeine Lösung

$$u(t; x_0) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} x_0$$

(Matrix-Exponentialansatz). Das maximale Existenzintervall ist jeweils $I_{\max}(x_0) = \mathbb{R}$, die einzige Ruhelage des Systems ist $x_0 = 0$, und für alle anderen Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist $|u(t; x_0)| = |x_0|$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und es gilt

$$\mathcal{O}(x_0) = \alpha(x_0) = \omega(x_0) = B_{|x_0|}(0) .$$

Die in diesen Beispielen auftretenden Orbits sind von der Struktur tatsächlich die generischen, denn es gibt (in allgemeinen Dimensionen) die folgende Klassifikation:

Satz 5.5 (Klassifikation der Orbits)**.** *Seien $N \in \mathbb{N}$, $D' \subset \mathbb{R}^N$ offen, $f\colon D' \to \mathbb{R}^N$ Lipschitz-stetig und $x_0 \in D'$. Für den Orbit $\mathcal{O}(x_0)$ von $u' = f(u)$ gilt genau einer der folgenden drei Fälle:*

(i) *$\mathcal{O}(x_0) = \{x_0\}$ und x_0 ist eine Ruhelage des Systems, also $u(t; x_0) = x_0$ für alle t aus dem maximalen Existenzintervall $I_{\max}(x_0) = \mathbb{R}$;*

(ii) *$\mathcal{O}(x_0) = \mathcal{O}^+(x_0) = \mathcal{O}^-(x_0)$ ist eine geschlossene, nicht-triviale Kurve und $t \mapsto u(t; x_0)$ ist nicht-konstant und periodisch auf dem maximalen Existenzintervall $I_{\max} = \mathbb{R}$;*

(iii) *$\mathcal{O}(x_0)$ ist eine Doppelpunkt-freie Kurve (ohne die Endpunkte), nämlich genau das Bild der Lösung auf dem (offenen) maximalen Existenzintervall $I_{\max}(x_0)$, und $t \mapsto u(t; x_0)$ ist dort eine injektive Funktion.*

Beweis. Wir zeigen, dass aus der Nicht-Injektivität von $t \mapsto u(t; x_0)$ schon (i) oder (ii) folgen muss. Sei also $t \mapsto u(t; x_0)$ eine nicht-injektive Funktion. Dann gibt es zwei Zeiten $t_1 \neq t_2$ in $I_{\max}(x_0)$ mit

$$u(t_1; x_0) = u(t_2; x_0) .$$

Wegen der Translationseigenschaft (5.1) lösen die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} &t \mapsto u(t; x_0) && \text{definiert für } t \in I_{\max}(x_0) \\ &t \mapsto u(t + t_1 - t_2; x_0) && \text{definiert für } t \in I_{\max}(x_0) - t_1 + t_2 \end{aligned}$$

die Gleichung $u' = f(u)$ und nehmen nach Voraussetzung für $t = t_2$ den gleichen Wert an. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung für jedes Anfangswertproblem müssen die Funktionen bereits übereinstimmen, und insbesondere muss dann auch

$$I_{\max}(x_0) = I_{\max}(x_0) - t_1 + t_2$$

gelten, was wegen $t_1 \neq t_2$ nur für $I_{\max}(x_0) = \mathbb{R}$ möglich ist. Wir haben damit

$$u(t + t_1 - t_2; x_0) = u(t; x_0) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

gezeigt, und induktiv erhalten wir dann

$$u(t + k(t_1 - t_2); x_0) = u(t; x_0) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Damit ist die Funktion $t \mapsto u(t; x_0)$ periodisch mit Periode $|t_2 - t_1|$. Nun können zwei Fälle auftreten: entweder ist $t \mapsto u(t; x_0)$ konstant gleich x_0 mit $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0\}$, also Aussage (i), oder nicht-konstant und periodisch mit einer nicht-trivialen geschlossenen Kurve als Orbit $\mathcal{O}(x_0)$, also Aussage (ii). □

Bemerkung 5.6. *Im skalaren Fall $N = 1$ können tatsächlich nur einpunktige Mengen oder offene Intervalle (möglicherweise mit Intervallgrenzen $\pm\infty$) als Orbits auftreten. Alle periodischen Lösungen sind in diesem Fall also bereits konstant.*

Beweis. Ist $t \mapsto u(t; x_0)$ eine periodische Lösung von $u' = f(u)$, so nimmt sie ihr Maximum und Minimum an. Es gibt also insbesondere ein $t_1 \in \mathbb{R}$ mit $0 = u'(t_1; x_0) = f(u(t_1; x_0))$, also ist $u(t_1; x_0)$ eine Nullstelle von f und damit Ruhelage des Systems. Damit folgt $u(t; x_0) = x_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. □

Definition 5.7. *Seien $N \in \mathbb{N}$, $D' \subset \mathbb{R}^N$ offen und $f\colon D' \to \mathbb{R}^N$ Lipschitz-stetig. Ein Punkt $x_0 \in D'$ heißt* periodischer Punkt mit Minimalperiode $T > 0$ *zur Differentialgleichung $u' = f(u)$, falls*

$$u(T; x_0) = x_0 \quad \textit{und} \quad u(t; x_0) \neq x_0 \textit{ für alle } t \in (0, T)$$

gelten. In diesem Fall heißt $\mathcal{O}(x_0)$ dann geschlossener *oder* periodischer Orbit *zu $u' = f(u)$.*

Eine wichtige Eigenschaft autonomer Systeme ist weiterhin, dass jeder Punkt aus D' auf genau einem Orbit liegt, das heißt also, dass zwei Orbits bereits übereinstimmen, falls sie sich in einem Punkt schneiden (und jeder Punkt $x_0 \in D'$ liegt natürlich in mindestens einem Orbit, dem Orbit $\mathcal{O}(x_0)$).

Satz 5.8 (Partition des Definitionsbereichs durch Orbits)**.** *Seien $N \in \mathbb{N}$, $D' \subset \mathbb{R}^N$ offen und $f\colon D' \to \mathbb{R}^N$ Lipschitz-stetig. Dann ist die auf D' erklärte Relation*

$$x_0 \sim x_1 \quad :\Leftrightarrow \quad \textit{es existiert ein } t_1 \in I_{\max}(x_0) \textit{ mit } u(t_1; x_0) = x_1$$

eine Äquivalenzrelation und für $x_0 \in D'$ ist $\mathcal{O}(x_0)$ die von x_0 erzeugte Äquivalenzklasse.

Beweis. Für die Eigenschaft der Äquivalenzrelation müssen wir Reflexivität, Symmetrie und Transitivität nachweisen.

- Reflexivität: wegen $u(0; x_0) = x_0$ gilt $x_0 \sim x_0$.
- Symmetrie: ist $x_0 \sim x_1$, so gibt es ein $t_1 \in I_{\max}(x_0)$ mit $u(t_1; x_0) = x_1$. Mit Proposition 5.1 (iii) zu den Flusseigenschaften für autonome Systeme folgt dann

  $$x_0 = u(-t_1; u(t_1; x_0)) = u(-t_1; x_1)\,,$$

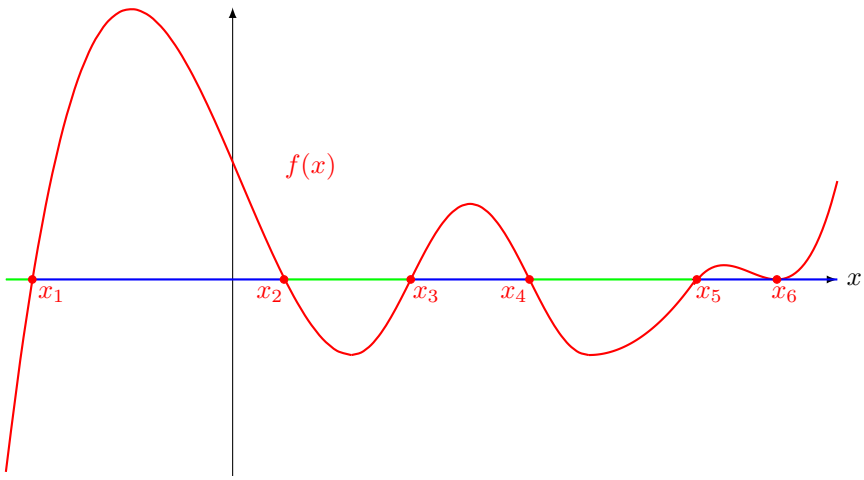
  mit $-t_1 \in I_{\max}(x_1) = I_{\max}(x_0) - t_1$ also insbesondere $x_1 \sim x_0$.
- Transitivität: wir nehmen nun $x_0, x_1, x_2 \in D'$ mit $x_0 \sim x_1$ und $x_1 \sim x_2$, d.h. es gibt $t_1 \in I_{\max}(x_0)$ mit $u(t_1; x_0) = x_1$ und $t_2 \in I_{\max}(x_1)$ mit $u(t_2; x_1) = x_2$. Mit Proposition 5.1 (ii) folgt dann

  $$u(t_1 + t_2; x_0) = u(t_2; u(t_1; x_0)) = u(t_2; x_1) = x_2$$

  (und $t_1 + t_2 \in I_{\max}(x_0)$ gilt wegen $t_1 \in I_{\max}(x_0)$ und $t_2 \in I_{\max}(x_1) = I_{\max}(x_0) - t_1$). Damit haben wir also auch $x_0 \sim x_2$ gezeigt.

Jeder Orbit besteht nach Definition nur aus Punkten aus dem Bild von $t \mapsto u(t; x_0)$ für $t \in I_{\max}(x_0)$, und damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Bemerkung 5.9. *Für* skalare Gleichungen *kann man die Orbits* (*sowie die Monotonie der Lösungskurven*) *sehr einfach bestimmen. Zunächst berechnet man die singulären Punkte der Strukturfunktion und bekommt darüber alle einpunktigen Orbits, also die Ruhelagen des Systems* (*und die zu einem solchen Punkt* $x_0 \in D'$ *gehörige Lösungskurve ist dann gerade* $\mathbb{R} \times \{x_0\}$). *Nach Satz* 5.5 *und Bemerkung* 5.6 *sind alle anderen Orbits dann offene Intervalle, und zwar genau die zwischen den Nullstellen liegenden Intervalle sowie die Intervalle mit Intervallgrenzen* $\pm\infty$ *und kleinster/größter Nullstelle. Da die Strukturfunktion auf jedem dieser Intervalle ein einheitliches Vorzeichen hat, sind die Lösungen mit Startwert in einem dieser Intervalle also immer streng monoton wachsend oder streng monoton fallend und müssen im Limes* $t \to \pm\infty$ *entweder gegen eine der Ruhelagen konvergieren oder divergieren.*



Ist der Anfangswert x_0 *in den blauen Intervallen, so wachsen die Lösungen streng monoton und die* α/ω*-Grenzmenge ist die linke/rechte Intervallgrenze* (*falls endlich*)*. Ist* x_0 *dagegen in den grünen Intervallen, so fallen die Lösungen streng monoton und die* α/ω*-Grenzmenge ist die rechte/linke Intervallgrenze* (*falls endlich*)*.*

Grenzmengen sind besonders einfach zu bestimmen, wenn $u(t; x_0)$ bei $t \to \pm\infty$ konvergiert, dies ist aber für Systeme im Allgemeinen nicht der Fall. Grundsätzlich könnte man erwarten, dass die Grenzmengen von $x_0 \in D'$ abhängen. Dies tun sie auch, jedoch nur in einem schwachen Sinne, nämlich dass sie von seinem Orbit abhängen.

Satz 5.10 (Charakterisierung von Grenzmengen)**.** *Seien* $N \in \mathbb{N}$, $D' \subset \mathbb{R}^N$ *offen und* $f\colon D' \to \mathbb{R}^N$ *Lipschitz-stetig. Ist* $x_0 \in D'$, *so dass* $\mathbb{R}^+ \subset I_{\max}(x_0)$ *bzw.* $R^- \subset I_{\max}(x_0)$ *gilt und* $\mathcal{O}^+(x_0)$ *bzw.* $\mathcal{O}^-(x_0)$ *kompakt in* D' *enthalten ist, dann haben wir die folgenden Aussagen:*

(i) *Ist* $t \mapsto u(t; x_0)$ *konstant gleich* x_0, *so gilt* $\omega(x_0) = \{x_0\}$ *bzw.* $\alpha(x_0) = \{x_0\}$.

(ii) *Ist* $t \mapsto u(t; x_0)$ *eine periodische Funktion, so gilt* $\omega(x_0) = \mathcal{O}^+(x_0)$ *bzw.* $\alpha(x_0) = \mathcal{O}^-(x_0)$.

(iii) *Allgemein gilt*

$$\omega(x_0) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}^+} \overline{\mathcal{O}^+(u(t; x_0))} = \bigcap_{t \in \mathbb{R}^+} \overline{\{u(s; x_0) \colon s \geq t\}}$$

bzw.

$$\alpha(x_0) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}^-} \overline{\mathcal{O}^-(u(t; x_0))} = \bigcap_{t \in \mathbb{R}^-} \overline{\{u(s; x_0) \colon s \leq t\}}\,.$$

Beweis. Wir beweisen hier nur die Aussagen für die ω-Grenzmengen, der Beweis für die entsprechenden Aussagen zu den α-Grenzmengen geht jedoch vollkommen analog.

Die Implikation (iii) $\Rightarrow$ (ii) folgt direkt aus der Tatsache, dass für alle $t > 0$

$$\overline{\mathcal{O}^+(u(t;x_0))} = \{u(s;x_0)\colon s \in [0,T)\} = \mathcal{O}(x_0)$$

für jede Periode $T > 0$ von $t \mapsto u(t;x_0)$ gilt.

Die Implikation (iii) $\Rightarrow$ (i) gilt trivialerweise, denn hier gilt für alle $t > 0$ sogar

$$\overline{\mathcal{O}^+(u(t;x_0))} = \{x_0\} = \mathcal{O}(x_0)\,.$$

Beweis der Aussage (iii)*:* Wegen der Flusseigenschaft aus Proposition 5.1 (ii) gilt $\mathcal{O}^+(u(t;x_0)) = \{u(s;x_0)\colon s \le t\}$, so dass wir nur das erste Gleichheitszeichen beweisen brauchen. Um hier die Inklusion "$\subseteq$" zu zeigen, betrachten wir einen beliebigen ω-Grenzpunkt $x^* \in \omega(x_0)$. Nach Definition gibt es dann eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $[0,\infty)$ mit

$$\lim_{k\to\infty} t_k = \infty \qquad \text{und} \qquad x^* = \lim_{k\to\infty} u(t_k;x_0)\,.$$

Für jedes beliebige, feste $t \in \mathbb{R}^+$ gibt es also einen Index $k_0(t) \in \mathbb{N}$ mit $t_k \ge t$ für alle $k \ge k_0(t)$. Folglich gilt $x^* \in \overline{\{u(s;x_0)\colon s \ge t\}}$, und damit wegen der Beliebigkeit von $t \in \mathbb{R}^+$ auch

$$x^* \in \bigcap_{t\in\mathbb{R}^+} \overline{\{u(s;x_0)\colon s \ge t\}} = \bigcap_{t\in\mathbb{R}^+} \overline{\mathcal{O}^+(u(t;x_0))}\,.$$

Für die umgekehrte Inklusion "$\supseteq$" betrachten wir ein beliebiges $x^* \in \bigcap_{t\in\mathbb{R}^+} \overline{\mathcal{O}^+(u(t;x_0))}$. Es gilt insbesondere

$$x^* \in \overline{\mathcal{O}^+(u(k;x_0))} \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}\,,$$

also auch $B_{1/k}(x^*) \cap \mathcal{O}^+(u(k;x_0)) \neq \emptyset$, und damit finden wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $t_k \in [k,\infty)$ mit $u(t_k;x_0) \in B_{1/k}(x^*)$. Nach Konstruktion ist die Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $[0,\infty)$ und erfüllt $\lim_{k\to\infty} t_k \ge \lim_{k\to\infty} k = \infty$. Außerdem gilt

$$\lim_{k\to\infty} |u(t_k;x_0) - x^*| \le \lim_{k\to\infty} k^{-1} = 0\,,$$

also $\lim_{k\to\infty} u(t_k;x_0) = x^*$, womit $x^* \in \omega(x_0)$ bewiesen ist. □

Bemerkung 5.11. *Ist $\mathcal{O}^+(x_0)$ bzw. $\mathcal{O}^-(x_0)$ zusätzlich beschränkt, so kann man zeigen, dass die Grenzmenge $\omega(x_0)$ bzw. $\alpha(x_0)$ nicht-leer, kompakt und zusammenhängend ist, mit*

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}\big(u(t;x_0),\omega(x_0)\big) = 0 \qquad \textit{bzw.} \qquad \lim_{t\to-\infty} \operatorname{dist}\big(u(t;x_0),\alpha(x_0)\big) = 0\,.$$

5.2 Ebene autonome Systeme

In Kapitel 1.4 haben wir bereits gesehen, dass man ein System von zwei (expliziten) autonomen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung in einem Phasenraumportrait graphisch veranschaulichen kann, indem man Orbits in die (u_1,u_2)-Ebene einzeichnet, wobei man aber die Zeitabhängigkeit nur indirekt darstellen kann. Wir werden nun sehen, wie man die Geometrie der Orbits – wieder mit Verlust der Information der Zeitabhängigkeit – durch das Lösen einer skalaren Differentialgleichung bestimmt.

Satz 5.12 (Orbits als Lösungskurven)**.** *Seien $D' \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f\colon D' \to \mathbb{R}^2$ Lipschitz-stetig und $x_0 \in D'$. Für die autonome gewöhnliche Differentialgleichung*

$$u' = f(u) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f_1(u_1,u_2) \\ f_2(u_1,u_2) \end{pmatrix}$$

gelten die folgenden Aussagen:

(i) *Ist $f_1(x_1, x_2) \neq 0$ für alle $(x_1, x_2) \in D'$, so stimmt der Orbit $\mathcal{O}(x_0)$ mit dem Graphen der maximalen Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} \dfrac{dv_2}{dx_1} &= \dfrac{f_2(x_1, v_2)}{f_1(x_1, v_2)} \\ v_2((x_0)_1) &= (x_0)_2 \end{cases}$$

überein (dies ist eine skalare gewöhnliche Differentialgleichung für v_2 in der Unbekannten x_1).

(ii) *Ist $f_2(x_1, x_2) \neq 0$ für alle $(x_1, x_2) \in D'$, so stimmt der Orbit $\mathcal{O}(x_0)$ mit dem Graphen der maximalen Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} \dfrac{dv_1}{dx_2} &= \dfrac{f_1(v_1, x_2)}{f_2(v_1, x_2)} \\ v_1((x_0)_2) &= (x_0)_1 \end{cases}$$

überein (dies ist eine skalare gewöhnliche Differentialgleichung für v_1 in der Unbekannten x_2).

Beweis. Wir beweisen nur die Aussage (i), denn die andere Aussage folgt mit $u_1 \leftrightarrow u_2$ und $f_1 \leftrightarrow f_2$. Sei u $(= u(\,\cdot\,; x_0))$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems $u' = f(u)$ mit Anfangswert $u(0) = x_0$, mit maximalem Existenzintervall $I_{\max}$. Nach Voraussetzung gilt $u_1' \neq 0$ auf $I_{\max}$, daher ist u_1 streng monoton und besitzt eine (streng monotone) Umkehrfunktion

$$u_1^{-1} \colon u_1(I_{\max}) \to I_{\max} \qquad \text{(bijektiv)}\,,$$

mit der Eigenschaft $u_1^{-1}((x_0)_1) = 0$. Den Orbit $\mathcal{O}(x_0)$ parametrisieren wir nun mithilfe von $t = u_1^{-1}(x_1)$ um als

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(x_0) &= \big\{ \big(u_1(t), u_2(t)\big) \colon t \in I_{\max} \big\} \\ &= \big\{ \big(x_1, u_2 \circ u_1^{-1}(x_1)\big) \colon x_1 \in u_1(I_{\max}) \big\}\,. \end{aligned}$$

Die Funktion $v_2 \coloneqq u_2 \circ u_1^{-1}$ ist nun unser Lösungskandidat für die skalare Gleichung. Tatsächlich gilt mit dem Umkehrsatz zunächst

$$\frac{du_1^{-1}(x_1)}{dx_1} = \big(u_1'(u_1^{-1}(x_1))\big)^{-1} = \big(f_1\big(u_1(u_1^{-1}(x_1)), u_2(u_1^{-1}(x_1))\big)\big)^{-1}$$

für $x_1 \in u_1(I_{\max})$. Dann folgt mit der Kettenregel die Lösungseigenschaft

$$\begin{aligned} \frac{dv_2(x_1)}{dx_1} &= u_2'(u_1^{-1}(x_1)) \frac{du_1^{-1}(x_1)}{dx_1} \\ &= \frac{f_2(u_1(u_1^{-1}(x_1)), u_2(u_1^{-1}(x_1)))}{f_1(u_1(u_1^{-1}(x_1)), u_2(u_1^{-1}(x_1)))} = \frac{f_2(x_1, v_2(x_1))}{f_1(x_1, v_2(x_1))}\,, \end{aligned}$$

und die Anfangsbedingung

$$v_2((x_0)_1) = u_2 \circ u_1^{-1}((x_0)_1) = u_2(0) = (x_0)_2$$

ist ebenfalls erfüllt.

Abschließend zeigen wir nun noch die Maximalität des Lösungsintervalls $u_1(I_{\max})$. Ohne Einschränkung nehmen wir dafür an, dass u_1 streng monoton wachsend ist, und wir schauen uns nur den oberen Randpunkt

$$J^+ = \lim_{t \nearrow I^+} u_1(t)$$

an (für den unteren Randpunkt argumentiert man analog). Wäre dieser endlich, so dass man $v_2 = u_2 \circ u_1^{-1}$ über J^+ hinaus zu einer Lösung $\bar{v}_2$ fortsetzen könnte, dann müsste für die Wohldefiniertheit der Gleichung $(J^+, \bar{v}_2(J^+)) \in D'$ und damit

$$\mathcal{O}^+(x_0) = \big\{ \big(x_1, v_2(x_1)\big) \colon x_1 \in [u_1(0), J^+) \big\} \subset \big\{ \big(x_1, \bar{v}_2(x_1)\big) \colon x_1 \in [u_1(0), J^+] \big\} \Subset D'$$

gelten. Wegen Satz 5.3 (iii) wäre in diesem Fall also $I^+ = \infty$. Um zu einem Widerspruch zu kommen, fixieren wir nun $T_0 > 0$ mit der Eigenschaft, dass $J^+ - 1 < u_1(t) \leq J^+$ für alle $t \geq T_0$ gilt. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ finden wir mithilfe des Mittelwertsatzes ein $t_n \in [nT_0, nT_0 + n]$ mit

$$0 < u_1'(t_n) = \frac{u_1(nT_0 + n) - u_1(nT_0)}{n} \leq \frac{1}{n}\,.$$

Im Limes folgt nach Annahme der strikten Positivität von f_1 sowie der Stetigkeit von f_1 und $\bar{v}_2$ dann der Widerspruch mit

$$0 < f_1(J^+, \bar{v}_2(J^+)) = \lim_{n\to\infty} f_1(u_1(t_n), u_2(t_n)) = \lim_{n\to\infty} u_1'(t_n) = 0\,.$$

Daher ist v_1 nicht über J^+ fortsetzbar, also schon die maximale Lösung, und die Aussage (i) ist damit vollständig bewiesen. □

Bemerkung 5.13. *Typischerweise ist die Annahme $f_1 \neq 0$ bzw. $f_2 \neq 0$ nicht auf dem ganzen Definitionsbereich D' erfüllt, daher schränkt man f für die praktische Anwendung des Satzes auf die offenen Mengen*

$$f_1^{-1}(\mathbb{R}^+) \text{ und } f_1^{-1}(\mathbb{R}^-) \qquad \text{bzw.} \qquad f_2^{-1}(\mathbb{R}^+) \text{ und } f_2^{-1}(\mathbb{R}^-)$$

ein. Die entsprechenden Gleichungen (i) *bzw.* (ii) *kann man dann lokal lösen und die dabei erhaltenen lokalen Orbits am Ende zusammensetzen. Hierbei ist zu beachten, dass einzig die Punkte $(x_1, x_2) \in D'$ mit $f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = 0$ dabei nicht berücksichtigt werden, jedoch handelt es sich bei diesen Punkten gerade um die Ruhelagen des Systems mit trivialem Orbit $\{(x_1, x_2)\}$.*

Beispiel 5.14. *Für die einfache gewöhnliche Differentialgleichung*

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{pmatrix}$$

und beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}^2$ wissen wir bereits, dass die Lösungen durch die Kreisgleichung $u_1^2 + u_2^2 = |x_0|^2$ beschrieben sind, der Orbit $\mathcal{O}(x_0)$ also genau der Kreis mit Radius $|x_0|$ um den Ursprung ist. Mit dem letzten Satz erhält man nun im Fall $u_2 \neq 0$ die Teilmenge $\mathcal{O}(x_0) \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$ über die skalare Differentialgleichung

$$\frac{dv_2}{dx_1} = -\frac{x_1}{v_2}$$

mit Anfangswert $v_2((x_0)_1) = (x_0)_2$, und im Fall $u_1 \neq 0$ die Teilmenge $\mathcal{O}(x_0) \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$ über die skalare Differentialgleichung

$$\frac{dv_1}{dx_2} = -\frac{x_2}{v_1}$$

mit Anfangswert $v_1((x_0)_2) = (x_0)_1$. Mit Separation der Variablen berechnet man hier

$$v_2(x_1) = \pm\sqrt{|x_0|^2 - x_1^2} \qquad \text{bzw.} \quad v_1(x_2) = \pm\sqrt{|x_0|^2 - x_2^2}$$

für $x_1 \in (-|x_0|, |x_0|)$ bzw. $x_2 \in (-|x_0|, |x_0|)$. Man erhält den Orbit $\mathcal{O}(x_0)$ jeweils bis auf zwei Punkte, aber mit Berücksichtigung beider Fälle den vollen Orbit.

Wir schreiben die beiden in Satz 5.12 erhaltenen Gleichungen nun implizit als

$$-f_2(x_1, v_2) + f_1(x_1, v_2)\frac{dv_2}{dx_1} = 0$$

bzw.

$$-f_1(v_1, x_2) + f_2(v_1, x_2)\frac{dv_1}{dx_2} = 0$$

um, so dass wir in einer Situation sind, in der man gegebenenfalls die Exaktheit der Gleichung wie in Kapitel 2.4 ausnutzen kann (Vorsicht, es gibt nun ein negatives Vorzeichen). Anstelle von exakter Gleichung und Stammfunktion spricht man für autonome Gleichungen nun von Hamiltonschem System und Hamiltonscher Funktion:

Definition 5.15. *Seien $D' \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f\colon D' \to \mathbb{R}^2$ Lipschitz-stetig. Das autonome System $u' = f(u)$ heißt (ebenes)* Hamiltonsches System*, falls es eine C^1-Funktion $H\colon D' \to \mathbb{R}$, eine sogenannte* Hamiltonsche Funktion*, gibt mit den Eigenschaften*

$$\frac{\partial H(x_1,x_2)}{\partial x_1} = -f_2(x_1,x_2) \quad \text{und} \quad \frac{\partial H(x_1,x_2)}{\partial x_2} = f_1(x_1,x_2) \qquad \text{für alle } (x_1,x_2) \in D'\,.$$

Bemerkung 5.16. *Ist $u' = f(u)$ ein Hamiltonsches System, so bedeutet dies, dass die beiden Differentialgleichungen für v_1 als Funktion von x_2 und für v_2 als Funktion von x_1 exakte Differentialgleichungen sind, und die Hamiltonsche Funktion ist gerade eine Stammfunktion für beide Gleichungen.*

Die Ergebnisse von exakten gewöhnlichen Differentialgleichungen aus Kapitel 2.4 lassen sich nun auf ebene Hamiltonsche Systeme übertragen. Beispielsweise liegt bei einem rechteckigen Gebiet $D' \subset \mathbb{R}^2$ und stetigen Funktionen $f_1, f_2\colon D' \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften, dass

$$\begin{aligned} &x_1 \mapsto f_1(x_1,x_2) \text{ stetig differenzierbar ist für alle } x_2\,,\\ &x_2 \mapsto f_2(x_1,x_2) \text{ stetig differenzierbar ist für alle } x_1\,, \end{aligned}$$

genau dann ein Hamiltonsches System vor, wenn

$$-\frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} \qquad \text{für alle } (x_1,x_2) \in D' \text{ gilt}\,.$$

In diesem Fall kann die Hamiltonsche Funktion, wie zuvor bei exakten Differentialgleichungen die Stammfunktion, wieder durch Integration bestimmt werden, vgl. Lemma 2.16. Für exakte Gleichungen galt außerdem die Eigenschaft, dass Lösungen in Niveaumengen der Stammfunktion verlaufen, und die direkte Entsprechung hier ist, dass die Orbits eines Hamiltonschen Systems Teilmengen der Niveaumengen der Hamiltonschen Funktion sind:

Satz 5.17 (über ebene Hamiltonsche Systeme)**.** *Seien $D' \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f\colon D' \to \mathbb{R}^2$ Lipschitz-stetig und $u' = f(u)$ ein ebenes Hamiltonsches System mit Hamiltonscher Funktion $H\colon D' \to \mathbb{R}$. Dann ist H längs jeden Orbits konstant, d.h. für jedes $x_0 \in D'$ gilt*

$$H(u(t;x_0)) = H(x_0) \qquad \text{für alle } t \in I_{\max}(x_0)\,.$$

Beweis. Differenzieren wir $t \mapsto H(u(t;x_0))$ mithilfe der Kettenregel, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{dH(u(t;x_0))}{dt} &= \frac{\partial H(u(t;x_0))}{\partial x_1} u_1'(t;x_0) + \frac{\partial H(u(t;x_0))}{\partial x_2} u_2'(t;x_0)\\ &= \frac{\partial H(u(t;x_0))}{\partial x_1} f_1(u(t;x_0)) + \frac{\partial H(u(t;x_0))}{\partial x_2} f_2(u(t;x_0)) \qquad (5.2)\\ &= -f_2(u(t;x_0))f_1(u(t;x_0)) + f_1(u(t;x_0))f_2(u(t;x_0)) = 0 \end{aligned}$$

für alle $t \in I_{\max}(x_0)$. Daher ist $t \mapsto H(u(t;x_0))$ auf $I_{\max}(x_0)$ eine Konstante, die wegen der Anfangsbedingung $u(0;x_0) = x_0$ gleich $H(x_0)$ sein muss. □

Beispiel 5.18. *Ein Hamiltonsches System liegt trivialerweise vor, wenn f_1 eine stetige Funktion in ausschließlich der x_2-Variable ist und f_2 eine stetige Funktion in ausschließlich der x_1-Variable ist. Dies war insbesondere der Fall beim reibungslosen mathematischen Pendel*

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u_2 \\ -\sin(u_1) \end{pmatrix}$$

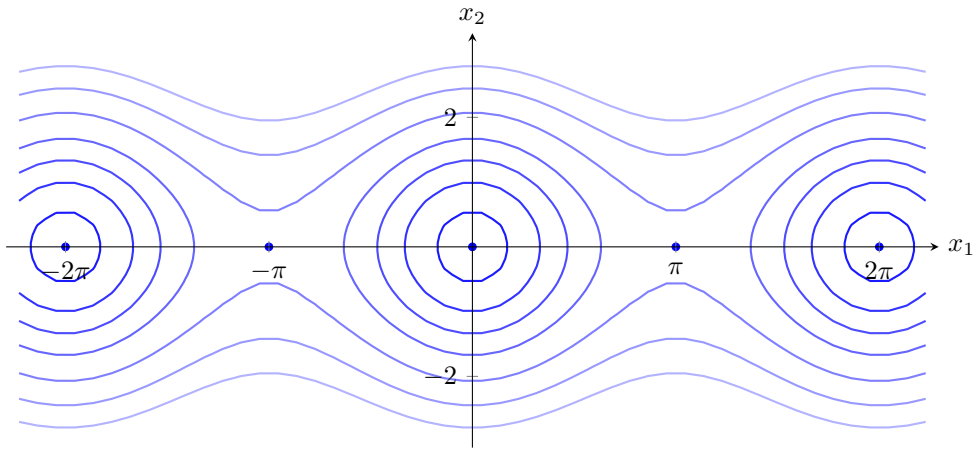
(nach Reduktion der Ordnung) aus Kapitel 1.3. Hier arbeitet man mit $D' = \mathbb{R}^2$ und berechnet die Hamiltonsche Funktion für $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ als

$$H(x_1,x_2) = -\int_{(x_0)_1}^{x_1} (-\sin(y_1)\,dy_1 + \int_{(x_0)_2}^{x_2} y_2\,dy_2 = -\cos(x_1) + \cos((x_0)_1) + \frac{1}{2}\big(x_2^2 - (x_0)_2^2\big)\,,$$

mit $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Der Orbit $\mathcal{O}(x_0)$ liegt dann in der Niveaumenge

$$N(x_0) = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_2^2 - 2\cos(x_1) = (x_0)_2^2 - 2\cos((x_0)_1)\right\},$$

die 2π-periodisch in x_1 ist.



Ist ein autonomes System $u' = f(u)$ nicht Hamiltonsch, so kann man wie früher bei den skalaren Gleichungen nach einer Art integrierenden Faktor suchen, also einer stetigen Funktion $m \colon D' \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$, so dass die Differentialgleichung

$$u' = f(u)m(u)$$

Hamiltonsch ist. Bei diesem Übergang werden zwar die Lösungen verändert, jedoch bleiben die Orbits erhalten, da sich diese nach Satz 5.12 gerade über Lösungenkurven der Differentialgleichungen

$$\frac{dv_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, v_2)}{f_1(x_1, v_2)} = \frac{f_2(x_1, v_2)m(x_1, v_2)}{f_1(x_1, v_2)m(x_1, v_2)} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{dv_1}{dx_2} = \frac{f_1(v_1, x_2)}{f_2(v_1, x_2)} = \frac{f_1(v_1, x_2)m(v_1, x_2)}{f_2(v_1, x_2)m(v_1, x_2)}$$

darstellen lassen. Die zugehörige Hamiltonsche Funktion für das modifizierte System $u' = f(u)m(u)$ beschreibt daher noch immer die Orbits des ursprünglichen Systems $u' = f(u)$.

Definition 5.19. *Seien $D' \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f \colon D' \to \mathbb{R}^2$ Lipschitz-stetig. Für das autonome System $u' = f(u)$ heißt eine C^1-Funktion $F \colon D' \to \mathbb{R}$* erstes Integral, *falls*

$$\frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2) = 0 \qquad \textit{für alle } (x_1, x_2) \in D' \textit{ gilt}.$$

Bemerkungen 5.20.

(i) *Die notwendige Bedingung für ein erstes Integral kann man auch kürzer schreiben als $\nabla F(x) \cdot f(x)$ für alle $x \in D'$.*

(ii) *Jede Hamiltonsche Funktion ist nach Definition auch ein erstes Integral, aber die Umkehrung gilt nicht notwendigerweise. Insbesondere ist etwa die oben diskutierte Hamiltonsche Funktion H_m für das modifizierte System $u' = f(u)m(u)$ ein erstes Integral für $u' = f(u)$, da in diesem Fall*

$$\frac{\partial H_m(x_1, x_2)}{\partial x_1} = -f_2(x_1, x_2)m(x_1, x_2) \quad \textit{und} \quad \frac{\partial H_m(x_1, x_2)}{\partial x_2} = f_1(x_1, x_2)m(x_1, x_2)$$

für alle $(x_1, x_2) \in D'$ gelten, aber im Allgemeinen ist H_m keine Hamiltonsche Funktion für das System $u' = f(u)$ selbst.

(iii) *Erste Integrale haben wie die Hamiltonschen Funktionen die Eigenschaft, dass sie auf Orbits des Systems $u' = f(u)$ konstant sind. Dies sieht man mithilfe der Kettenregel genauso wie im Beweis von Satz* 5.17*, da der Ausdruck* (5.2) *nach Definition des ersten Integrals verschwindet.*

(iv) *Jede konstante Funktion ist trivialerweise ein erstes Integral. Da man darüber aber keine Informationen über die Orbits des Systems $u' = f(u)$ gewinnen kann, interessiert man sich nur für erste Integrale, die auf keiner nicht-leeren offenen Teilmenge von D' konstant sind, sogenannte* nicht-triviale erste Integrale*. Diese kann man in Anwendungen häufig mithilfe des oben beschriebenen Verfahrens über integrierende Faktoren bestimmen.*

Beispiel: Klassisches Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra. Wir greifen nun wieder das Beispiel der zeitlichen Entwicklung zweier Population von Beutetieren u_1 und Räubern u_2 auf, für die wir in Kapitel 1.3 das autonome System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{cases} u_1' &= \alpha_1 u_1 - \beta_1 u_1 u_2\,, \\ u_2' &= -\alpha_2 u_2 + \beta_2 u_1 u_2\,, \end{cases} \tag{5.3}$$

mit positiven Parametern $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ aufgestellt haben. Wir wollen uns nun mit den eben vorgestellten Methoden die Orbits des Systems überlegen.

Der biologisch relevante Definitionsbereich für diese Gleichung ist $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$. Das Verhalten der Lösungen mit Anfangswerten in $\{0\} \times \mathbb{R}_0^+$ bzw. $\mathbb{R}_0^+ \times \{0\}$ ist jedoch trivial:

- ⋆ Der Ursprung $0 \in \mathbb{R}^2$ ist eine Ruhelage des Systems, also gilt hier $\mathcal{O}(0) = \{0\}$.

- ⋆ Ist $(x_0)_1 = 0$ und $(x_0)_2 > 0$, sind also am Anfang keine Beutetiere, sondern nur Räuber vorhanden, so ist $u_1 \equiv 0$ und das Lotka–Volterra-System reduziert sich dann auf die Gleichung $u_2' = -\alpha_2 u_2$, so dass $u_2(t) = (x_0)_2 \exp(-\alpha_2 t)$ exponentiell abfällt. Der positive Halborbit ist in diesem Fall also gerade $\mathcal{O}^+(x_0) = \{0\} \times (0, (x_0)_2)$ und der Orbit $\mathcal{O}(x_0) = \{0\} \times (0, \infty)$.

- ⋆ Ist dagegen $(x_0)_1 > 0$ und $(x_0)_2 = 0$, also am Anfang lediglich Beutetiere, aber keine Räuber vorhanden, so gilt entsprechend $u_2 \equiv 0$ und $u_1(t) = (x_0)_1 \exp(\alpha_1 t)$ wächst exponentiell. Der positive Halborbit ist in diesem Fall also gerade $\mathcal{O}^+(x_0) = ((x_0)_1, \infty) \times \{0\}$ und der Orbit $\mathcal{O}(x_0) = (0, \infty) \times \{0\}$.

Daher brauchen wir uns nur noch mit den Orbits im Gebiet $D' = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ beschäftigen (vgl. Partition des Definitionsbereichs durch Orbits in Satz 5.8, wenn man das System auf ganz $\mathbb{R}^2$ betrachten würde). Hier gibt es genau eine weitere Ruhelage:

- ⋆ Der Punkt $(\alpha_2/\beta_2, \alpha_1/\beta_1)$ ist eine Ruhelage mit Orbit $\mathcal{O}((\alpha_2/\beta_2, \alpha_1/\beta_1)) = \{(\alpha_2/\beta_2, \alpha_1/\beta_1)\}$.

Zur Bestimmung der restlichen Orbits überlegen wir uns zunächst ein erstes Integral für das System. Dazu schreiben wir die skalaren Gleichungen aus Satz 5.12, deren (zusammengesetzte) Lösungskurven gerade die Orbits darstellen, als implizite Gleichungen

$$\alpha_2 v_2 - \beta_2 x_1 v_2 + \big(\alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 v_2\big)\frac{dv_2}{dx_1} = 0 \quad \text{bzw.} \quad -\alpha_1 v_1 + \beta_1 v_1 x_2 + \big(-\alpha_2 x_2 + \beta_2 v_1 x_2\big)\frac{dv_1}{dx_2} = 0$$

um. Wegen

$$-\frac{\partial(-\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 x_2)}{\partial x_2} = \alpha_2 - \beta_2 x_1 \overset{\text{i.A.}}{\neq} \alpha_1 - \beta_1 x_2 = \frac{\partial(\alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2)}{\partial x_1}$$

sind diese Gleichungen nicht exakt, und entsprechend das Lotka–Volterra System nicht Hamiltonsch. Eine exakte Variante erhält man aber nach Division durch $x_1 x_2$, denn dann ist die Funktion auf der

linken Seite gerade unabhängig von x_2, und die Funktion auf der rechten Seite unabhängig von x_1. Als erstes Integral für das Lotka–Volterra System finden wir so

$$\begin{aligned} F(x_1,x_2) &= -\int_{(x_0)_1}^{x_1} \Big[-\frac{\alpha_2}{y_1}+\beta_2\Big]\,dy_1 + \int_{(x_0)_2}^{x_2}\Big[\frac{\alpha_1}{y_2}-\beta_1\Big]\,dy_2 \\ &= \alpha_2\log\Big(\frac{x_1}{(x_0)_1}\Big) - \beta_2\big(x_1-(x_0)_1\big) + \alpha_1\log\Big(\frac{x_2}{(x_0)_2}\Big) - \beta_1\big(x_2-(x_0)_2\big)\,. \end{aligned}$$

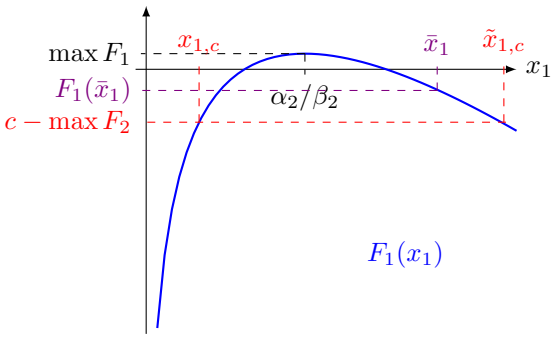
Um nun die Orbits zu bestimmen, müssen wir uns als nächstes mit den Niveaumengen

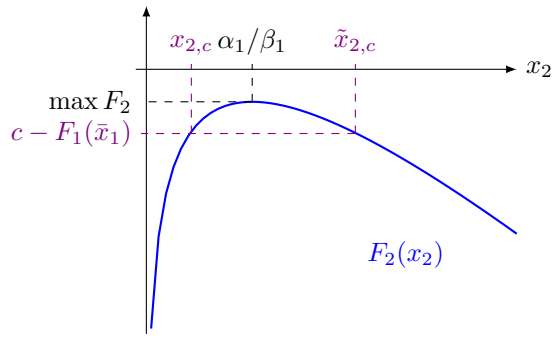
$$N(x_0) \coloneqq \big\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+ \colon F_1(x_1)+F_2(x_2) = F_1((x_0)_1)+F_2((x_0)_2)\big\}$$

von F oder, anders geschrieben, mit den Mengen $F^{-1}(c)$ für $c\in\mathbb{R}$ beschäftigen, wobei wir die Funktionen $F_1,F_2\in C(\mathbb{R}^+)$ mittels

$$F_1(x) \coloneqq \alpha_2\log(x)-\beta_2 x \qquad \text{und} \qquad F_2(x)\coloneqq \alpha_1\log(x)-\beta_1 x$$

für $x\in\mathbb{R}^+$ definiert haben. Diese Funktionen haben ihr Maximum in α_2/β_2 bzw. α_1/β_1, sind ansonsten strikt monoton und konvergieren bei $x\searrow 0$ und $x\to\infty$ gegen $-\infty$.





Um nun etwas über die Geometrie der Niveaumenge $N(x_0)$ aussagen zu können, bemerken wir zunächst

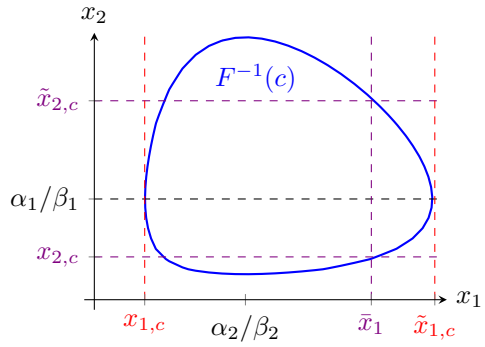
$$F^{-1}(c) = \big\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+ \colon F_1(x_1)+F_2(x_2)=c\big\}\neq\emptyset \quad\Leftrightarrow\quad c\in(-\infty,\max_{\mathbb{R}}F_1+\max_{\mathbb{R}}F_2]$$

Für $c=\max_{\mathbb{R}}F_1+\max_{\mathbb{R}}F_2$ erhalten wir genau $F^{-1}(\max_{\mathbb{R}}F_1+\max_{\mathbb{R}}F_2)=(\alpha_2/\beta_2,\alpha_1/\beta_1)$, also die uns schon bekannte Ruhelage. Für jedes Niveau $c\in(-\infty,\max_{\mathbb{R}}F_1+\max_{\mathbb{R}}F_2)$ dagegen werden wir als nächstes sehen, dass es sich bei der Niveaumenge $F^{-1}(c)$ um eine geschlossene, nicht-triviale Kurve handelt. Dazu überlegen wir uns, wie die x_1-Schnitte von $F^{-1}(c)$, also die Mengen

$$F^{-1}(c)\cap\{\bar{x}_1\}\times\mathbb{R}^+ = \big\{(\bar{x}_1,x_2)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+ \colon F_2(x_2)=c-F_1(\bar{x}_1)\big\}\,,$$

für festes $c\in(-\infty,\max_{\mathbb{R}}F_1+\max_{\mathbb{R}}F_2)$ und festes $\bar{x}_1\in\mathbb{R}$ aussehen. Bezeichnen wir mit $x_{1,c}<\tilde{x}_{1,c}$ die beiden Urbilder $F_1^{-1}(c-\max_{\mathbb{R}}F_2)$ (beachte, dass es sich wegen $c<\max_{\mathbb{R}}F_1+\max_{\mathbb{R}}F_2$ und der strikten Monotonie von F_1 in $(0,\alpha_2/\beta_2)$ bzw. in $(\alpha_2/\beta_2,\infty)$ tatsächlich genau zwei Urbilder gibt), so gelten:

- für $\bar{x}_1\in(x_{1,c},\tilde{x}_{1,c})$ folgt mit $F_1(\bar{x}_1)>F_1(x_{1,c})$ sofort $c-F_1(\bar{x}_1)<\max_{\mathbb{R}}F_2$ und damit besteht $F^{-1}(c)\cap\{\bar{x}_1\}\times\mathbb{R}^+$ aus genau zwei Punkten $\{(\bar{x}_1,x_{2,c}),(\bar{x}_1,\tilde{x}_{2,c})\}$ (vgl. Skizze oben);
- für $\bar{x}_1\in\{x_{1,c},\tilde{x}_{1,c}\}$ haben wir $c-F_1(\bar{x}_1)=\max_{\mathbb{R}}F_2$ und damit besteht $F^{-1}(c)\cap\{\bar{x}_1\}\times\mathbb{R}^+$ aus genau einem Punkt, nämlich $\{(\bar{x}_1,\alpha_1/\beta_1)\}$;
- für $\bar{x}_1\notin[x_{1,c},\tilde{x}_{1,c}]$ gilt $F^{-1}(c)\cap\{\bar{x}_1\}\times\mathbb{R}^+=\emptyset$.



Damit handelt es sich bei $F^{-1}(c) \cap \{\bar{x}_1\} \times \mathbb{R}^+$ also tatsächlich um eine geschlossene, nicht-triviale Kurve, und da die Geschwindigkeit von (u_1, u_2) auf dieser Kurve niemals verschwindet (dies galt nur in den Ruhelagen), haben wir gezeigt:

- ⋆ Für alle Punkte $x_0 \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \setminus (\alpha_2/\beta_2, \alpha_1/\beta_1)$ ist der Orbit $\mathcal{O}(x_0)$ eine geschlossene, nicht-triviale Kurve, die von einer periodischen Lösung erzeugt wird.

Damit ist die Charakterisierung der Orbits für das Lotka–Volterra-System abgeschlossen.

Zum Abschluss leiten wir noch einfache Eigenschaft für die Mittelwerte periodischer Lösungen des Lotka–Volterra-Systems her:

Lemma 5.21. *Sei $u \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ eine periodische Lösung mit Periode $T > 0$ des Lotka–Volterra Systems* (5.3) *für positive Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$. Dann gelten*

$$\frac{1}{T}\int_0^T u_1(t)\,dt = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{T}\int_0^T u_2(t)\,dt = \frac{\alpha_1}{\beta_1}\,.$$

Beweis. Da u_1 in jeder Komponente positive Werte hat, können wir insbesondere die Funktion $\log(u_1)$ betrachten. Aus der Periodizität von u und der Differentialgleichung für u_1 folgt nun

$$\begin{aligned} 0 = \log(u_1(T)) - \log(u_1(0)) &= \int_0^T \frac{d}{dt}\log(u_1(t))\,dt \\ &= \int_0^T \big[\alpha_1 - \beta_1 u_2(t)\big]\,dt = \alpha_1 T - \beta_1 \int_0^T u_2(t)\,dt\,, \end{aligned}$$

also die Aussage über die Mittelwerte von u_2. Analog folgt aus der Betrachtung der Funktion $\log(u_2(t))$ die zweite Aussage

$$0 = \log(u_2(T)) - \log(u_2(0)) = -\alpha_2 T + \beta_2 \int_0^T u_1(t)\,dt\,. \qquad \square$$

Bemerkung 5.22. *Die im Beweis verwendete Transformation $(v_1, v_2) := (\log(u_1), \log(u_2))$ der abhängigen Variable entspricht gerade dem Übergang vom Lotka–Volterra-System* (5.3) *auf ein Hamiltonsches System* (*analog der Bestimmung des ersten Integrals oben*)*. Es gilt nämlich gerade*

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 u_2 \\ -\alpha_2 + \beta_2 u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 \exp(v_2) \\ -\alpha_2 + \beta_2 \exp(v_1) \end{pmatrix}\,.$$

5.3 Lineare ebene autonome Systeme

Wir spezialisieren uns nun auf lineare Systeme

$$u' = Au$$

mit konstanten Koeffizienten $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, für die wir in Kapitel 4.2 mithilfe der Matrix-Exponentialfunktion bereits eine allgemeine Lösungsformel hergeleitet haben. Hier interessieren wir uns nun aber für die möglichen *Phasenportraits* der Gleichung und führen erste wichtige Begriffe aus der Stabilitätstheorie ein. Ohne Einschränkung betrachtet wir hier nur den Fall, dass A bereits in reeller Jordan-Normalform vorliegt, denn andernfalls finden wir eine reguläre Transformationsmatrix $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass $T^{-1}AT = J$ in reeller Jordan-Normalform ist, und anstelle von Lösungen u des System $u' = Au$ betrachtet man dann die transformierte Gleichung $v' = Jv$. Die Phasenportraits zu diesen beiden Systemen unterscheiden sich lediglich durch eine Anwendung von T bzw. T^{-1} (beachte, dass für jede Lösung v zu $v' = Jv$ die Funktion Tv eine Lösung zu $u' = Au$ ist, und dass umgekehrt für jede Lösung u zu $u' = Au$ die Funktion $T^{-1}u$ eine Lösung zu $v' = Jv$ ist).

Für die reellen Jordan-Normalformen und ihre zugehörige Matrix-Exponentialfunktion müssen wir die folgenden Fälle unterscheiden (vgl. Beispiel 4.26):

(1) Es gibt zwei unterschiedliche reelle Eigenwerte $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$, also

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \text{und damit} \qquad \exp(tJ) = \begin{pmatrix} \exp(t\lambda_1) & 0 \\ 0 & \exp(t\lambda_2) \end{pmatrix} .$$

(2) Es gibt einen reellen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ der geometrischen Vielfachheit 2, also

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{und damit} \qquad \exp(tJ) = \exp(t\lambda) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(3) Es gibt nur einen reellen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ der geometrischen Vielfachheit 1, also

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{und damit} \qquad \exp(tJ) = \exp(t\lambda) \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(4) Es gibt keinen reellen Eigenwert, sondern ein komplex konjugiertes Eigenwertpaar $\lambda \pm \mathrm{i}\,\mu$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, also

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{und damit} \qquad \exp(tJ) = \exp(t\lambda) \begin{pmatrix} \cos(t\mu) & \sin(t\mu) \\ -\sin(t\mu) & \cos(t\mu) \end{pmatrix} .$$

Die Lösung des Systems $u' = Ju$ mit Startwert $u(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2$ ist nun genau die Funktion $u(t; x_0) = \exp(tJ)x_0$. Für die Phasenraumportraits müssen wir auch noch unterscheiden, ob es sich bei J um eine reguläre oder eine singuläre Matrix handelt, also ob 0 als Eigenwert auftritt und es damit außer $u \equiv 0$ noch andere konstante Lösungen des Systems gibt.

Der reguläre Fall

Hier ist $(0, 0)$ die einzige Gleichgewichtslage des Systems, und wir gehen nun die verschiedenen Möglichkeiten für die reelle Jordan-Normalform durch.

(R.1) Für $J = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bekommen wir als allgemeine Lösung zu $u' = Ju$ die Funktion

$$u(t; x_0) = \begin{pmatrix} (x_0)_1 \exp(t\lambda_1) \\ (x_0)_2 \exp(t\lambda_2) \end{pmatrix} ,$$

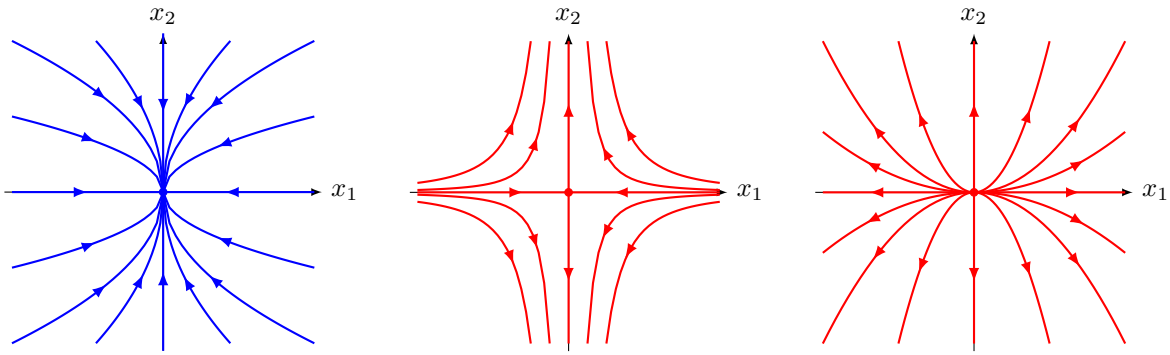
und damit gibt es die folgenden Orbits:

- für $x_0 = 0$ haben wir den Punkt-Orbit $\mathcal{O}(0) = \{0\}$;
- für $(x_0)_1 = 0$ und $(x_0)_2$ echt positiv/negativ haben wir $\mathcal{O}(x_0) = \{\text{positive/negative } x_2\text{-Halbachse}\}$;
- für $(x_0)_2 = 0$ und $(x_0)_1$ echt positiv/negativ haben wir $\mathcal{O}(x_0) = \{\text{positive/negative } x_1\text{-Halbachse}\}$;
- für $(x_0)_1$, $(x_0)_2 \neq 0$ kann man über $x_1 := (x_0)_1 \exp(t\lambda_1)$ und damit $\exp(t\lambda_2) = (x_1/(x_0)_1)^{\lambda_2/\lambda_1}$ den Orbit $\mathcal{O}(x_0)$ darstellen als

$$\mathcal{O}(x_0) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ (x_0)_2 (x_1/(x_0)_1)^{\lambda_2/\lambda_1} \end{pmatrix} : x_1/(x_0)_1 \in \mathbb{R}^+ \right\} .$$

Für die Phasenportraits müssen wir nun im Wesentlichen nur unterscheiden, welche Vorzeichen die Eigenwerte λ_1, λ_2 haben, und nehmen dafür ohne Einschränkung $\lambda_1 < \lambda_2$ an. Zu beachten ist hier, dass der erste Koordinatenvektor e_1 gerade den Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 und der zweite Koordinatenvektor e_2 gerade den Eigenvektor zum Eigenwert λ_2 darstellt.

(a) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ **(b)** $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ **(c)** $0 < \lambda_1 < \lambda_2$



stabiler (zwei-tangentiger) Knoten — Sattelpunkt — instabiler (zwei-tangentiger) Knoten

Bei der Gleichgewichtslage $0 \in \mathbb{R}^2$ in (a) bzw. (c) spricht man von einem *stabilem* bzw. *instabilem Knoten*, da alle Trajektorien in bzw. aus dem Punkt 0 laufen. Das bedeutet, startet man in einem beliebigem Punkt x_0, so konvergiert die Lösung $u(t; x_0)$ bei $t \to \infty$ bzw. $t \to -\infty$ gegen 0.

Die Bezeichnung *n-tangentig* bei einem Knoten bedeutet, dass es genau n verschiedene Tangenten gibt, entlang der die Lösungen in den Knoten hinein- oder herauslaufen. Im Fall (a) liegt für alle Orbits, die nicht auf Koordinatenachsen liegen, wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ein echter Wurzelausdruck cx_1^α mit $\alpha \in (0, 1)$ vor. Damit haben alle Lösungen mit Anfangswerte x_0 mit $(x_0)_2 \neq 0$ als Tangente die x_2-Achse. Die zweite Tangente ist die x_1-Achse, auf denen alle Lösungen verlaufen, die Anfangswerte x_0 mit $(x_0)_1 \neq 0$ und $(x_0)_2 = 0$ haben. Im Fall (c) liegt für alle Orbits, die nicht auf Koordinatenachsen liegen, wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ein echter Potenzausdruck cx_1^p mit $p \in (1, \infty)$ vor. Damit haben alle Lösungen mit Anfangswerte x_0 mit $(x_0)_1 \neq 0$ als Tangente die x_1-Achse. Die zweite Tangente ist die x_2-Achse, auf denen alle Lösungen verlaufen, die Anfangswerte x_0 mit $(x_0)_1 = 0$ und $(x_0)_2 \neq 0$ haben.

(R.2) Für $J = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda)$ mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bekommen wir (mit $\lambda_1 = \lambda_2$ im Fall (R.1)) als allgemeine Lösung zu $u' = Ju$ die Funktion

$$u(t; x_0) = x_0 \exp(t\lambda)\,,$$

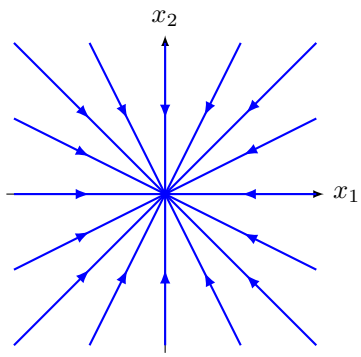
und damit haben wir

- für $x_0 = 0$ den Punkt-Orbit $\mathcal{O}(0) = \{0\}$;
- für $(x_0)_1 = 0$ und $(x_0)_2$ echt positiv/negativ den Orbit $\mathcal{O}(x_0) = \{\text{positive/negative } x_2\text{-Halbachse}\}$;
- für $(x_0)_2 = 0$ und $(x_0)_1$ echt positiv/negativ den Orbit $\mathcal{O}(x_0) = \{\text{positive/negative } x_1\text{-Halbachse}\}$;
- für $(x_0)_2 \neq 0$ den Orbit

$$\mathcal{O}(x_0) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ (x_0)_2 x_1/(x_0)_1 \end{pmatrix} : x_1/(x_0)_1 \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

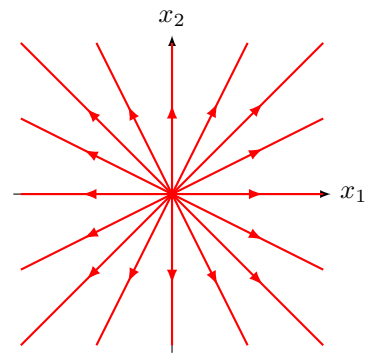
Die Phasenportraits hängen nun lediglich vom Vorzeichen des Eigenwerts λ ab.

(a) $\lambda < 0$



stabiler (viel-tangentiger) Knoten

(b) $\lambda > 0$



instabiler (viel-tangentiger) Knoten

(R.3) Für $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bekommen wir als allgemeine Lösung zu $u' = Ju$ die Funktion

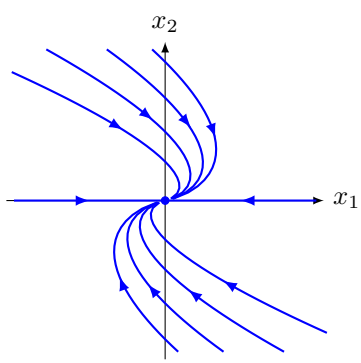
$$u(t; x_0) = \begin{pmatrix} (x_0)_1 \exp(t\lambda) + (x_0)_2 t \exp(t\lambda) \\ (x_0)_2 \exp(t\lambda) \end{pmatrix},$$

und damit haben wir

- für $x_0 = 0$ den Punkt-Orbit $\mathcal{O}(0) = \{0\}$;
- für $(x_0)_2 = 0$ und $(x_0)_1$ echt positiv/negativ den Orbit $\mathcal{O}(x_0) = \{\text{positive/negative } x_1\text{-Halbachse}\}$;
- für $(x_0)_1$, $(x_0)_2 \neq 0$ den Orbit (über $x_2 := (x_0)_2 \exp(t\lambda)$)

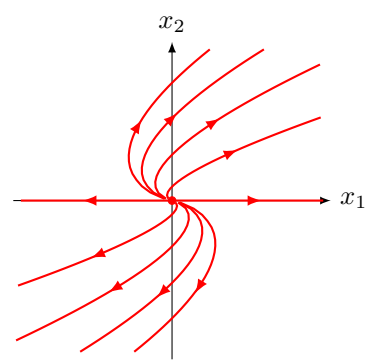
$$\mathcal{O}(x_0) = \left\{ \begin{pmatrix} (x_0)_1 x_2/(x_0)_2 + x_2/\lambda \log(x_2/(x_0)_2) \\ x_2 \end{pmatrix} : x_2/(x_0)_2 \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

(a) $\lambda < 0$



stabiler (ein-tangentiger) Knoten

(b) $\lambda > 0$



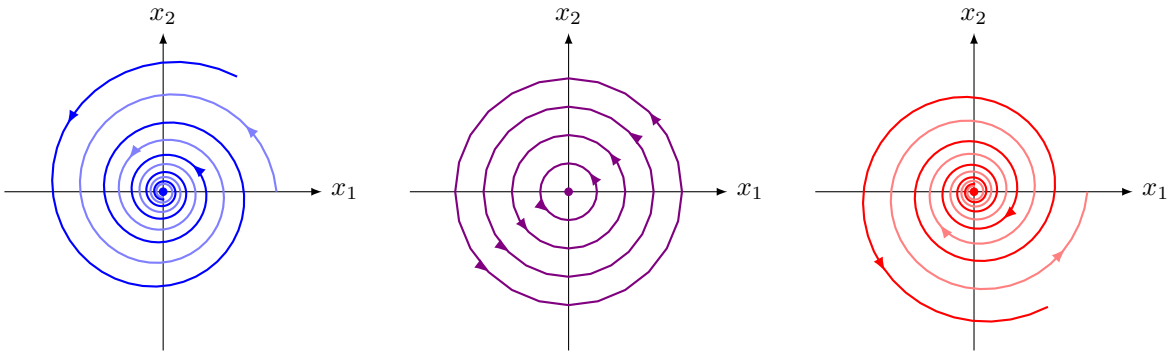
instabiler (ein-tangentiger) Knoten

(R.4) Für $J = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bekommen wir als allgemeine Lösung zu $u' = Ju$ die Funktion

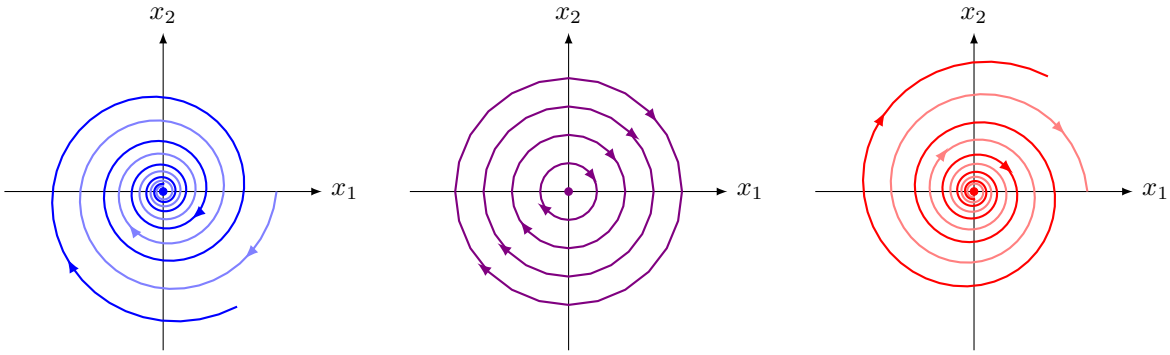
$$u(t; x_0) = \exp(t\lambda) \underbrace{\begin{pmatrix} (x_0)_1 \cos(t\mu) + (x_0)_2 \sin(t\mu) \\ -(x_0)_1 \sin(t\mu) + (x_0)_2 \cos(t\mu) \end{pmatrix}}_{\text{Kreisbewegung um 0 mit Radius } |x_0|},$$

In Polarkoordinaten verhält sich der Radius exponentiell, während der Winkel mit konstanter Geschwindigkeit rotiert. Die Bewegungsrichtung hängt dabei nur von den Vorzeichen von λ und μ ab: für $\lambda > 0$ handelt es sich um größer werdende Spiralen, für $\lambda = 0$ um Kreise, und für $\lambda < 0$ um kleiner werdende Kreise. Für $\mu > 0$ laufen diese im Uhrzeigersinn, und für $\mu < 0$ gegen den Uhrzeigersinn.

(a1) $\lambda < 0$, $\mu < 0$ **(b1)** $\lambda = 0$, $\mu < 0$ **(c1)** $\lambda > 0$, $\mu < 0$



(a2) $\lambda < 0$, $\mu > 0$ **(b2)** $\lambda = 0$, $\mu > 0$ **(c2)** $\lambda > 0$, $\mu > 0$



stabiler Strudel Zentrum oder Wirbel instabiler Strudel

Der singuläre Fall

Hier besitzt die Matrix J einen Eigenwert 0 und $u \equiv 0$ ist damit nicht die einzige konstante Lösung des Systems. Wir gehen nun wieder die verschiedenen Möglichkeiten für die reelle Jordan-Normalform durch.

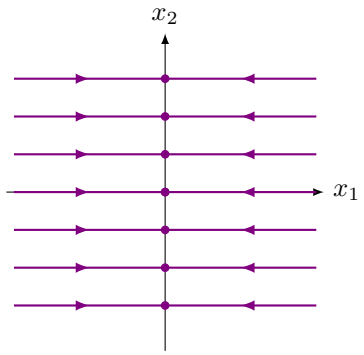
(S.1) Für $J = \operatorname{diag}(\lambda, 0)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (ohne Einschränkung ist hier der zweite Koordinatenvektor e_2 ein Eigenvektor zum Eigenwert 0) bekommen wir als allgemeine Lösung zu $u' = Ju$ die Funktion

$$u(t; x_0) = \begin{pmatrix} (x_0)_1 \exp(t\lambda) \\ (x_0)_2 \end{pmatrix},$$

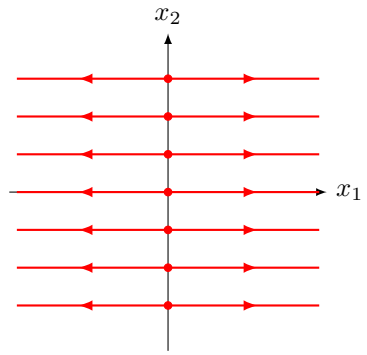
und damit haben wir

- für $(x_0)_1 = 0$ den Punkt-Orbit $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0\}$, d.h. alle Punkte auf der x_2-Achse sind Ruhelagen;
- für $(x_0)_1 \neq 0$ den Orbit
$$\mathcal{O}(x_0) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ (x_0)_2 \end{pmatrix} : x_1/(x_0)_1 \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

(a) $\lambda < 0$



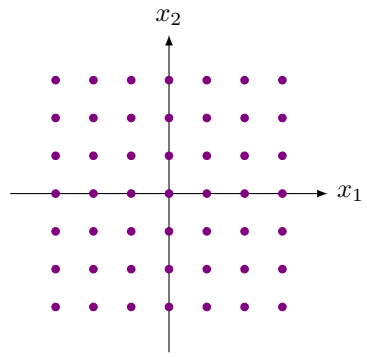
(b) $\lambda > 0$



(S.2) Für $J = \mathbb{O}_{2\times 2}$ haben wir als allgemeine Lösung zu $u' = Ju$ die Funktion

$$u(t; x_0) = x_0\,,$$

d.h. jeder Punkt in $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ist eine Ruhelage mit $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0\}$.



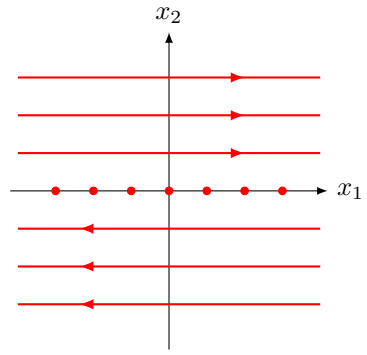
(S.3) Für $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ haben wir als allgemeine Lösung zu $u' = Ju$ die Funktion

$$u(t; x_0) = \begin{pmatrix} (x_0)_1 + t(x_0)_2 \\ (x_0)_2 \end{pmatrix}\,,$$

und wir haben

- für $(x_0)_2 = 0$ den Punkt-Orbit $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0\}$, d.h. alle Punkte auf der x_1-Achse sind Ruhelagen;
- für $(x_0)_2 \neq 0$ den Orbit

$$\mathcal{O}(x_0) = \left\{ \begin{pmatrix} (x_0)_1 + x_1 \\ (x_0)_2 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$



Damit ist die grundsätzliche Klassifikation der ebenen linearen Systeme anhand der Phasenportraits abgeschlossen, und man muss lediglich beachten, dass man noch eine Matrix-Transformation durchführen muss, wenn die Matrix A des Systems $u' = Au$ nicht bereits in reeller Jordan-Normalform vorliegt.

Eine wesentliche Eigenschaft im regulären Fall war dabei, dass bei nur negativen (Realteilen der) Eigenwerte alle Lösungen gegen die einzige Gleichgewichtslage, nämlich den Ursprung, bei $t \to \infty$ laufen. Bei nur positiven (Realteilen der) Eigenwerte dagegen konvergieren alle Lösungen gegen den Ursprung bei $t \to -\infty$, und bei einem positivem und einem negativen Wert tritt beides, je nach Wahl des Anfangswerts, auf. Das grundsätzliche Verhalten ist hier also einzig über die Eigenwerte charakterisiert. Dies ist tatsächlich auch in höheren Dimensionen der Fall, wie wir im nächsten Kapitel noch sehen werden.

Bemerkung 5.23. *Für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ kann man eine entsprechende Charakterisierung auch über die Determinante und die Spur von A geben: für $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt gerade*

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathbb{1}_{2\times 2}) &= \det \begin{pmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 - \lambda(a_{1,1} + a_{2,2}) + a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} = \lambda^2 - \lambda \operatorname{Spur}(A) + \det(A)\,. \end{aligned}$$

Damit sind die komplexen Eigenwerte von A gerade

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{Spur}(A) \pm \sqrt{\operatorname{Spur}(A)^2 - 4\det(A)} \Big)$$

und es folgt:

- *Ist $\operatorname{Spur}(A)^2 = 4\det(A)$, so gibt es einen doppelten reellen Eigenwert, dessen Vorzeichen durch das Vorzeichen von $\operatorname{Spur}(A)$ bestimmt ist;*
- *Ist $\operatorname{Spur}(A)^2 > 4\det(A)$, so gibt es zwei verschiedene reelle Eigenwerte, mit*
  - *verschiedenem Vorzeichen für $\det(A) < 0$,*
  - *positiven Vorzeichen für $\det(A) > 0$ und $\operatorname{Spur}(A) > 0$,*
  - *negativen Vorzeichen für $\det(A) > 0$ und $\operatorname{Spur}(A) < 0$,*
  - *einem Eigenwert 0 für $\det(A) = 0$, und das Vorzeichen des zweiten Eigenwerts ist durch das Vorzeichen von $\operatorname{Spur}(A)$ bestimmt;*
- *Ist $\operatorname{Spur}(A)^2 < 4\det(A)$, so gibt es ein komplex konjugiertes Eigenwertpaar, und das Vorzeichen des Realteils ist durch das Vorzeichen von $\operatorname{Spur}(A)$ bestimmt.*

Kapitel 6

Stabilitätstheorie

Die Stabilitätstheorie ist ein wichtiges Thema der sogenannten *qualitativen* Theorie von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Wir interessieren uns dabei für die Frage, wie sich die Lösungen eines Anfangswertproblems ändern, wenn man (bei gleicher Anfangszeit) den Anfangswert variiert. In Kapitel 3.4 haben wir uns bereits mit der stetigen und differenzierbaren Abhängigkeit der Lösung von den Daten auf kompakten Zeitintervallen des maximalen Existenzintervalls beschäftigt. Nun wollen wir dagegen das *Langzeitverhalten* untersuchen.

6.1 Grundbegriffe

Zunächst führen wir ein paar allgemeine Definitionen ein, werden uns später aber im Wesentlichen auf die Untersuchung der Stabilität von Gleichgewichtslagen beschränken.

Definition 6.1. *Sei $D \subset \mathbb{R}^{1+N}$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}^N$ stetig und Lipschitz-stetig bezüglich der x-Variable. Eine Lösung $\mu\colon (t_-, \infty) \to \mathbb{R}^N$ (für ein $t_- \in [-\infty, \infty)$) zur Differentialgleichung $u' = f(t,u)$ heißt*

(i) (Ljapunov-)stabil, *falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ und $t_0 > t_-$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ gibt mit der Eigenschaft: für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^N$ mit $|x_0 - \mu(t_0)| < \delta$ existiert die Lösung $u(\,\cdot\,; t_0, x_0)$ zum Anfangswertproblem $u' = f(t,u)$ auf $[t_0, \infty)$ mit Startwert x_0 bei t_0, und diese Lösung erfüllt*

$$|u(t; t_0, x_0) - \mu(t)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } t \geq t_0\,;$$

(ii) (Ljapunov-)instabil, *falls μ nicht stabil ist;*

(iii) attraktiv, *falls es zu jedem $t_0 > t_-$ ein $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}(t_0)$ gibt mit der Eigenschaft: für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^N$ mit $|x_0 - \mu(t_0)| < \tilde{\delta}$ existiert die Lösung $u(\,\cdot\,; t_0, x_0)$ zum Anfangswertproblem $u' = f(t,u)$ auf $[t_0, \infty)$ mit Startwert x_0 bei t_0, und diese Lösung erfüllt*

$$\lim_{t\to\infty} |u(t; t_0, x_0) - \mu(t)| = 0\,.$$

In diesem Fall heißt die Menge

$$\big\{(t_0, x_0) \in (t_-, \infty) \times \mathbb{R}^N\colon \lim_{t\to\infty} |u(t; t_0, x_0) - \mu(t)| = 0\big\}$$

der Einzugsbereich *von μ;*

(iv) asymptotisch stabil, *falls μ stabil und attraktiv ist.*

Bemerkung 6.2. *Wegen der stetigen Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsdaten (Satz 3.34) braucht man für die Stabilität und Attraktivität einer Lösung die entsprechende Bedingung nur für einen einzigen Anfangszeitpunkt $t_0^* > t_-$ zu überprüfen.*

Beweis. Stabilität: Wir nehmen an, dass die Stabilitätsbedingung für einen Anfangszeitpunkt $t_0^* > t_-$ erfüllt ist, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta^* = \delta^*(\varepsilon, t_0^*) > 0$ mit der Eigenschaft, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^N$ mit $|x_0 - \mu(t_0)| < \delta^*$ die Lösung $u(\,\cdot\,; t_0, x_0)$ auf $[t_0, \infty)$ existiert und die Abschätzung

$$|u(t; t_0^*, x_0) - \mu(t)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } t \geq t_0^* \text{ erfüllt.}$$

Nun wollen wir die Stabilitätsbedingung für beliebige Wahlen von $t_0 > t_-$ und $\varepsilon > 0$ nachweisen.

Für $t_0 < t_0^*$ wenden wir Satz 3.34 über die stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten auf dem kompakten Intervall $[t_0, t_0^*]$ und mit $\delta^*/2$ anstelle von ε an. Dies liefert uns ein $\delta > 0$, so dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^N$ mit $|x_0 - \mu(t_0)| < \delta$ die Lösung $u(\,\cdot\,; t_0, x_0)$ auf $[t_0, t_0^*]$ existiert und insbesondere die Abschätzung

$$|u(t; t_0, x_0) - \mu(t)| < \delta^* \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_0^*] \text{ erfüllt.}$$

Wegen $\delta^* \leq \varepsilon$ gilt die Stabilitätsbedingung nach Konstruktion insbesondere schon auf dem Intervall $[t_0, t_0^*]$. Da wir außerdem $|u(t_0^*; t_0, x_0) - \mu(t_0^*)| < \delta^*$ sichergestellt haben, folgt aus den Flusseigenschaften in Proposition 3.37 sowie der angenommenen Stabilitätsbedingung zur Anfangszeit t_0^*, dass $u(\,\cdot\,; t_0, x_0)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}^N$ mit $|x_0 - \mu(t_0)| < \delta$ auf $[t_0, \infty)$ existiert und zudem

$$|u(t; t_0, x_0) - \mu(t)| = \big|u\big(t; t_0^*, u(t_0^*; t_0, x_0)\big) - \mu(t)\big| < \varepsilon \qquad \text{für alle } t \geq t_0^* \text{ erfüllt.}$$

Damit haben wir die geforderte Abschätzung für alle $t \geq t_0$ gezeigt.

Für $t_0 > t_0^*$ argumentiert man vollkommen analog, mit dem einzigen Unterschied, dass man Satz 3.34 auf dem kompakten Intervall $[t_0^*, t_0]$ anwendet und so sicherstellt, dass man beim "Zurückverfolgen" der bei (t_0, x_0) gestarteten Lösung einen Punkt in $\{t_0^*\} \times (\mu(t_0^*) - \delta^*, \mu(t_0^*) + \delta^*)$ trifft.

Attraktivität: Wir nehmen als nächstes an, dass die Attraktivitätsbedingung für einen Anfangszeitpunkt $t_0^* > t_-$ erfüllt ist, d.h. es gibt ein $\tilde{\delta}^* = \tilde{\delta}^*(t_0^*) > 0$ mit der Eigenschaft, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^N$ mit $|x_0 - \mu(t_0)| < \tilde{\delta}^*$

$$\lim_{t \to \infty} |u(t; t_0^*, x_0) - \mu(t)| = 0 \qquad \text{gilt.}$$

Um die Stabilitätsbedingung für eine beliebige Anfangszeit $t_0 > t_-$ nachzuweisen, argumentieren wir analog wie für die Stabilität: wir wenden Satz 3.34 auf dem kompakten Intervall $[t_0, t_0^*]$ für $t_0 < t_0^*$ bzw. auf dem kompakten Intervall $[t_0^*, t_0]$ für $t_0 > t_0^*$ an, um ein $\tilde{\delta} > 0$ zu finden, so dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^N$ mit $|x_0 - \mu(t_0)| < \delta$ die Lösung $u(\,\cdot\,; t_0, x_0)$ auf diesem kompakten Intervall existiert und insbesondere $|u(t_0^*; t_0, x_0) - \mu(t_0^*)| < \delta^*$ erfüllt. Damit folgt die Existenz von $u(\,\cdot\,; t_0, x_0)$ auf ganz $[t_0, \infty)$ sowie

$$\lim_{t \to \infty} |u(t; t_0, x_0) - \mu(t)| = \lim_{t \to \infty} \big|u\big(t; t_0^*, u(t_0^*; t_0, x_0)\big) - \mu(t)\big| = 0\,. \qquad \square$$

Beispiele 6.3.

(i) *Wir betrachten die skalare gewöhnliche Differentialgleichung $u' = (\alpha + \sin(t))u$ für einen reellen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$. Es handelt sich hierbei um eine homogene, lineare Differentialgleichung mit stetigen Koeffizienten, und die allgemeine Lösung ist*

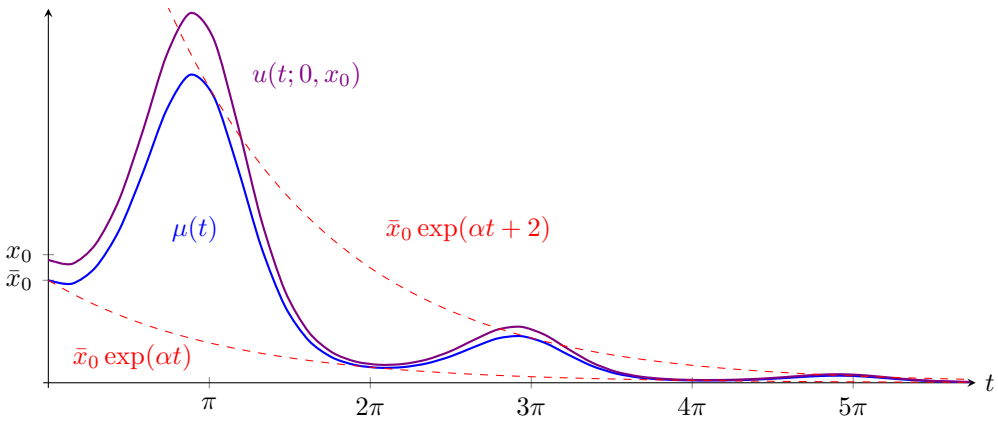
$$u(t; t_0, x_0) = x_0 \exp\big(\alpha(t - t_0) - \cos(t) + \cos(t_0)\big)$$

für $t \in \mathbb{R}$. Wir wollen nun die Stabilität und Attraktivität einer Lösung in Abhängigkeit von α untersuchen, und wählen hierzu ohne Einschränkung $\mu(t) := u(t; 0; \bar{x}_0)$, für ein festes $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}$ (in Satz 6.7 werden wir später sehen, dass tatsächlich alle Lösungen einer linearen Gleichung das gleiche Verhalten bezüglich Stabilität und Attraktivität aufweisen). Nach Bemerkung 6.2 reicht es, die entsprechende Bedingung lediglich für $t_0 = 0$ zu überprüfen. Es gilt nun

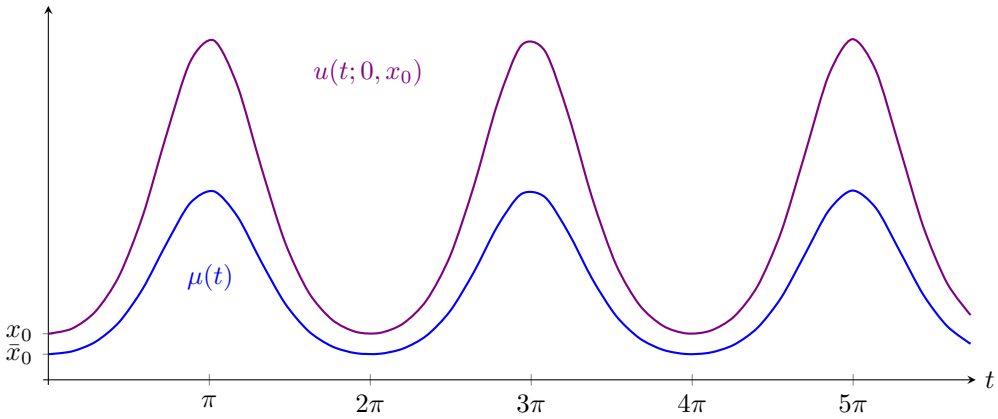
$$\big|u(t; 0; x_0) - \mu(t)\big| = |x_0 - \bar{x}_0| \exp\big(\alpha t - \cos(t) + 1\big)$$

für $t \in \mathbb{R}$, und mit $\alpha t \leq \alpha t - \cos(t) + 1 \leq \alpha t + 2$ unterscheiden wir nun die drei Fälle:

- *Für $\alpha < 0$ ist μ sowohl stabil (mit der Wahl $\delta = \varepsilon \exp(-2)$) als auch attraktiv (mit der Wahl $\delta = \varepsilon \exp(-2)$ und Einzugsbereich $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$), also ist μ auch asymptotisch stabil.*



- *Für $\alpha = 0$ ist μ stabil (mit der Wahl $\delta = \varepsilon \exp(-2)$), aber nicht attraktiv (da für alle $t \in \mathbb{R}$ die Abschätzung $|u(t;0;x_0) - \mu(t)| \geq |x_0 - \bar{x}_0|$ gilt), also auch nicht asymptotisch stabil.*



- *Für $\alpha > 0$ ist μ instabil und auch nicht attraktiv (da die Abweichung $|u(t;0,x_0) - \mu(t)| \geq |x_0 - \bar{x}_0| \exp(\alpha t)$ für $x_0 \neq \bar{x}_0$ für hinreichend große t beliebig groß wird).*

(ii) *Für das ebene autonome lineare System $u' = Au$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ (in Jordan-Normalform) kann man das Verhalten hinsichtlich Stabilität und Attraktivität für eine* Ruhelage *direkt aus den Phasenportraits in Kapitel* 5.3 *und allgemein aus den Eigenwerten von A (auch wenn A nicht in Jordan-Normalform vorliegt) ablesen:*

- *Asympotische Stabilität, also Attraktivität und Stabilität, liegt für die einzige Ruhelage $0 \in \mathbb{R}^2$ vor, falls alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben, also in den Fällen* (R.1.a), (R.2.a), (R.3.a) *und* (R.4.a), *die alle blau gezeichnet waren.*
- *Stabilität, aber keine Attraktivität, liegt für jede Ruhelage vor, falls alle Eigenwerte von A nicht-positiven Realteil haben und es einen Eigenwert mit verschwindendem Realteil gibt, dessen geometrische Vielfachheit der algebraischen entspricht, also in den Fällen* (R.4.b), (S.1.a) *und* (S.2), *die alle lila gezeichnet waren.*
- *Weder Stabilität noch Attraktivität liegt für jede Ruhelage vor, falls es mindestens einen Eigenwert von A mit positivem Realteil gibt oder falls der Realteil eines Eigenwerts verschwindet und die geometrische Vielfachheit kleiner als die algebraische Vielfachheit ist, also in den Fällen* (R.1.b), (R.1.c), (R.2.b), (R.3.b), (R.4.c), (S.1.b) *und* (S.3), *die alle rot gezeichnet waren.*

Eine entsprechende Charakterisierung mittels Eigenwerten ergibt sich auch für höher-dimensionale lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten, wie wir in Satz 6.11 *sehen werden.*

In diesen Beispielen waren alle attraktiven Lösungen auch stabil. Dies ist für *skalare* Gleichungen und *lineare* Systeme tatsächlich immer der Fall, im Allgemeinen ist dies jedoch falsch (es gibt beispielsweise ebene Systeme mit einer attraktiven, aber instabilen Lösung).

Satz 6.4 (Attraktivität und Stabilität bei skalaren Differentialgleichungen)**.** *Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}^2$ stetig und Lipschitz-stetig bezüglich der x-Variable. Ist $\mu\colon (t_-, \infty) \to \mathbb{R}$ (für ein $t_- \in [-\infty, \infty)$) eine attraktive Lösung zu $u' = f(t, u)$, so ist μ auch stabil.*

Beweis. Seien $\varepsilon > 0$ und $t_0 < t_-$ beliebig. Wegen der Attraktivität von μ gibt es ein $\tilde{\delta} > 0$ mit der Eigenschaft, dass $u(\,\cdot\,; t_0, x_0)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|x_0 - \mu(t_0)| < \tilde{\delta}$ auf $[t_0, \infty)$ existiert und

$$\lim_{t\to\infty} |u(t; t_0, x_0) - \mu(t)| = 0$$

erfüllt. Wir finden daher ein $T_\varepsilon \geq t_0$, so dass

$$|u(t; t_0, \mu(t_0) \pm \tilde{\delta}/2) - \mu(t)| < \varepsilon \qquad \text{für } t > T_\varepsilon \text{ gilt.}$$

Da sich Lösungen wegen der Eindeutigkeit nicht schneiden können (also $u(t; t_0, x_0) < u(t; t_0, \tilde{x}_0)$ für alle Wahlen von $x_0 < \tilde{x}_0$ und $t \in I_{\max}(x_0) \cap I_{\max}(\tilde{x}_0)$ gilt), folgt aus der letzten Ungleichung bereits

$$|u(t; t_0, x_0) - \mu(t)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } t > T_\varepsilon \text{ und } x_0 \in \mathbb{R} \text{ mit } |x_0 - \mu(t_0)| \leq \tilde{\delta}/2\,.$$

Damit haben wir den Abstand zwischen der fixierten Lösung μ und $u(\,\cdot\,; t_0, x_0)$ für große Zeiten $t > T_\varepsilon$ verifiziert. Das noch fehlende Zeitintervall $[t_0, T_\varepsilon]$ ist kompakt, und mit der stetigen Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsdaten in Satz 3.34 finden wir $\delta \in (0, \tilde{\delta}/2]$, so dass

$$|u(t; t_0, x_0) - \mu(t)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } t \in [t_0, T_\varepsilon] \text{ und } x_0 \in \mathbb{R} \text{ mit } |x_0 - \mu(t_0)| \leq \delta$$

gilt. Aus diesen beiden Formeln erhalten wir genau die behauptete Stabilität. □

Bemerkung 6.5. *Die Idee des Beweises ist skalar und lässt sich nicht auf höhere Dimensionen $N > 1$ verallgemeinern: im Beweis wählten wir zwei Lösungen (nämlich die mit Startwert $\mu(t_0) \pm \tilde{\delta}/2$) aus, um jede Lösung mit einem zwischen diesen beiden Lösungen liegenden Startwert von oben und unten zu begrenzen, zumindest für große Zeiten $t > T_\varepsilon$. In höheren Dimensionen müsste man für die gleiche Argumentation alle Lösungen mit Startwert x_0 mit $|x_0 - \mu(t_0)| = \tilde{\delta}/2$ betrachten, also unendlich viele, um einen $(N-1)$-dimensionalen "Schlauch" um μ zu finden. Das Problem dabei ist jedoch das folgende: für jede dieser Lösungen $u(\,\cdot\,; t_0, x_0)$ gibt es eine Zeit $T_\varepsilon(x_0)$, für die $|u(t; t_0, x_0) - \mu(t)| < \varepsilon$ für $t > T_\varepsilon(x_0)$ gilt, jedoch findet man im Allgemeinen keine uniforme Grenze T_ε, so dass dies für* alle *Lösungen mit Startwert x_0 mit $|x_0 - \mu(t_0)| = \tilde{\delta}/2$ (und dann erst recht nicht für die mit Startwert x_0 mit $|x_0 - \mu(t_0)| < \tilde{\delta}/2$) zutrifft.*

Bemerkung 6.6. *Besonders einfach lassen sich Attraktivität und Stabilität der Ruhelagen für skalare* autonome *gewöhnliche Differentialgleichungen $u' = f(u)$ mit einer Funktion $C^1(\mathbb{R})$ (oder auch $C^1(I)$ für ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$) untersuchen. Dazu erinnern wir uns, vgl. Bemerkung 5.9, dass ein Orbit $\mathcal{O}(x_0)$ entweder einpunktig ist, nämlich wenn x_0 eine Nullstelle von f ist, oder ein offenes Intervall mit Nullstellen und möglicherweise $\pm\infty$ als Intervallgrenzen, nämlich das Bild einer streng monotonen Lösung auf ihrem maximalen Existenzintervall. Diese Orbits bilden eine Zerlegung von ganz $\mathbb{R}$ (oder des ganzen Intervalls I). Ist $\bar{x}_0$ nun eine Nullstelle von f und $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so dass $[\bar{x}_0 - \varepsilon, \bar{x}_0 - \varepsilon]$ keine weitere Nullstelle von f enthält, so können wir die folgenden Fälle unterscheiden:*

- *Ist $f'(\bar{x}_0) > 0$, so ist die Ruhelage $\bar{x}_0$ instabil: für jedes beliebige $x_0 \in (\bar{x}_0, \bar{x}_0 + \varepsilon)$ ist die Lösung $u(\,\cdot\,; t_0, x_0)$ streng monoton wachsend und verletzt wegen des Partitionssatzes (ab einer endlichen Zeit) die Bedingung $|u(t; t_0, x_0) - \bar{x}_0| < \varepsilon$. Entsprechend ist für jedes beliebige $x_0 \in (\bar{x}_0 - \varepsilon, \bar{x}_0)$ die Lösung $u(\,\cdot\,; t_0, x_0)$ streng monoton fallend und verletzt (ab einer endlichen Zeit) die Bedingung $|u(t; t_0, x_0) - \bar{x}_0| < \varepsilon$.*

- *Ist $f'(\bar{x}_0) < 0$, so ist die Ruhelage $\bar{x}_0$ asymptotisch stabil: für jedes beliebige $x_0 \in (\bar{x}_0, \bar{x}_0+\varepsilon)$ ist die Lösung $u(\,\cdot\,; t_0, x_0)$ streng monoton fallend und nach unten durch $\bar{x}_0$ beschränkt. Entsprechend ist für jedes beliebige $x_0 \in (\bar{x}_0-\varepsilon, \bar{x}_0)$ die Lösung $u(\,\cdot\,; t_0, x_0)$ streng monoton wachsend und nach oben durch $\bar{x}_0$ beschränkt. Daher enthält in beiden Fällen das maximale Existenzintervall $[t_0, \infty)$ und es gilt wegen des Partitionssatzes tatsächlich $\lim_{t\to\infty} u(t; t_0, x_0) = \bar{x}_0$. Daher ist die Ruhelage $\bar{x}_0$ attraktiv, und nach Satz 6.4 damit bereits asymptotisch stabil.*

- *Ist $f'(\bar{x}_0) = 0$, so ist keine Aussage möglich, sondern man muss sich dafür die Vorzeichenwechsel höherer Ableitungen anschauen, vgl. Übungen.*

6.2 Stabilität linearer Systeme

Für Systeme von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$u' = A(t)u + b(t)$$

mit stetigen Koeffizienten $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{N\times N})$ und stetiger Inhomogenität $b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ (die auch auf Teilmengen der Form (t_-, ∞) für ein $t_- \in [-\infty, \infty)$ statt auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sein können) haben wir in Kapitel 4 bereits die Struktur der Lösungsräume untersucht und die Darstellung der Lösung des Anfangswertproblems mit $u(t_0) = x_0$ als

$$u(t; t_0, x_0) = \Psi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Psi(t, s)b(s)\, ds$$

mit der Übergangsmatrix Ψ hergeleitet. Nun wollen wir Aussagen zur Stabilität treffen. Im ersten Schritt überlegen wir uns dazu, dass das Verhalten der Lösungen zum inhomogenen System durch das Verhalten der Lösungen des homogenen System bestimmt ist, und zwar genauer schon durch das der trivialen Lösung. Im nächsten Schritt charakterisieren wir das Stabilitätsverhalten dann mithilfe der Übergangsmatrix (bzw. für Gleichungen mit konstanter Koeffizientenmatrix mithilfe der Eigenwerte).

Satz 6.7 (einheitliches Stabilitätsverhalten aller Lösungen)**.** *Seien $A \in C((t_-, \infty), \mathbb{R}^{N\times N})$ und $b \in C((t_-, \infty), \mathbb{R}^N)$ für ein $t_- \in [-\infty, \infty)$. Alle Lösungen des inhomogenen linearen Systems $u' = A(t)u + b(t)$ sind genau dann stabil bzw. attraktiv bzw. asymptotisch stabil, wenn die triviale Lösung $\mu_{hom} \equiv 0$ des homogenen Systems $u' = A(t)u$ eben diese Eigenschaft hat.*

Beweis. Sei zunächst μ_{inh} eine stabile Lösung des inhomogenen Systems $u' = A(t)u + b(t)$. Zu jeder Wahl von $\varepsilon > 0$ und $t_0 > t_-$ existiert also ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^N$ mit $|x_0 - \mu_{inh}(t_0)| < \delta$ die Abschätzung

$$|u_{inh}(t; t_0, x_0) - \mu_{inh}(t)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } t \geq t_0 \text{ erfüllt ist}$$

(die Existenz dieser Lösung $u_{inh}(t; t_0, x_0)$ zu $u' = A(t)u + b(t)$ auf ganz $[t_0, \infty)$ gilt offensichtlich schon wegen der linearen Wachstumsbedingung). Die triviale Lösung μ_{hom} des homogenen Systems $u' = A(t)u$ ist dann stabil für die gleiche Wahl von δ: ist nämlich u_{hom} eine beliebige Lösung zu $u' = A(t)u$ mit $|u_{hom}(t_0)| < \delta$, so löst $u_{inh} := u_{hom} + \mu_{inh}$ das inhomogene System $u' = A(t)u + b(t)$ und erfüllt nach Konstruktion die obige Voraussetzung $|u_{inh}(t_0) - \mu_{inh}(t_0)| < \delta$. Folglich haben wir auch

$$|u_{hom}(t) - 0| = |u_{inh}(t) - \mu_{inh}(t)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } t \geq t_0\,.$$

Ist umgekehrt die triviale Lösung $\mu_{hom} \equiv 0$ des homogenen Systems $u' = A(t)u$ stabil, so gibt es zu jeder Wahl von $\varepsilon > 0$ und $t_0 > t_-$ ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^N$ mit $|x_0| < \delta$ die Abschätzung

$$|u_{hom}(t; t_0, x_0)) - 0| < \varepsilon \qquad \text{für alle } t \geq t_0 \text{ erfüllt ist.}$$

Wir zeigen nun für eine beliebige Lösung μ_{inh} des inhomogenen Systems $u' = A(t)u + b(t)$ Stabilität, und zwar für die gleiche Wahl von δ. Sei dazu u_{inh} eine weitere Lösung zu $u' = A(t)u + b(t)$, für die

$|u_{inh}(t_0) - \mu_{inh}(t_0)| < \delta$ gilt. Dann löst $u_{hom} := u_{inh} - \mu_{inh}$ das homogene System $u' = A(t)u$ und erfüllt $|u_{hom}(t_0)| < \delta$. Folglich gilt

$$|u_{inh}(t) - \mu_{inh}(t)| = |u_{hom}(t) - 0| < \varepsilon \qquad \text{für alle } t \geq t_0\,.$$

Vollkommen analog zeigt man die Aussagen zu Attraktivität und dann auch zur asymptotischen Stabilität. □

Definition 6.8. *Seien $A \in C((t_-, \infty), \mathbb{R}^{N\times N})$ und $b \in C((t_-, \infty), \mathbb{R}^N)$ für ein $t_- \in [-\infty, \infty)$. Wir nennen das lineare System $u' = A(t)u + b(t)$* stabil, asymptotisch stabil *bzw.* instabil, *falls dies für die triviale Lösung $\mu_{hom} \equiv 0$ des homogenen Systems $u' = A(t)u$ gilt.*

Auf die getrennte Definition von Attraktivität und asymptotischer Stabilität können wir für lineare Systeme verzichten, da wie bei skalaren Differentialgleichungen auch hier Attraktivität Stabilität impliziert (und damit asymptotische Stabilität äquivalent zu Attraktivität ist). Als Vorüberlegung dazu charakterisieren wir zunächst Stabilität und Attraktivität durch Eigenschaften der Übergangsmatrix.

Satz 6.9 (Kriterien für Stabilität/Attraktivität mittels Übergangsmatrix)**.** *Sei $A \in C((t_-, \infty), \mathbb{R}^{N\times N})$ für ein $t_- \in [-\infty, \infty)$. Die triviale Lösung $\mu_{hom} \equiv 0$ des homogenen Systems $u' = A(t)u$ (und damit jede Lösung des homogenen Systems sowie des inhomogenen Systems für stetige Inhomogenitäten) ist genau dann*

(i) stabil, *falls zu einem (und damit zu jedem) $t_0 > t_-$ ein $K(t_0)$ existiert mit*

$$\|\Psi(t, t_0)\| \leq K(t_0) \qquad \textit{für alle } t \geq t_0\,;$$

(ii) attraktiv, *falls für ein (und damit für jedes) $t_0 > t_-$ gilt*

$$\lim_{t\to\infty} \Psi(t, t_0) = \mathbb{O}_{N\times N}\,.$$

Hierbei bezeichnet $\Psi(t, t_0)$ wieder die Übergangsmatrix von $u' = A(t)u$ mit Startzeit t_0.

Beweis. Der Beweis basiert im Wesentlichen auf der Darstellungsformel $u(t; t_0, x_0) = \Psi(t, t_0)x_0$ für die (eindeutige) Lösung des linearen Differentialgleichungssystems $u' = A(t)u$ mit Anfangswert $u(t_0) = x_0$ (und wegen der linearen Wachstumsbedingung existiert diese auch auf ganz (t_-, ∞)).

(i) Ist $\mu_{hom} \equiv 0$ eine stabile Lösung, so gibt es zu jedem $t_0 > t_-$ und der speziellen Wahl $\varepsilon = 1$ ein $\delta(t_0) > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: für alle $x_0 \in \mathbb{R}^N$ mit $|x_0| < \delta$ gilt die Abschätzung

$$|\Psi(t, t_0)x_0| = |u(t; t_0, x_0) - 0| < 1 \qquad \text{für alle } t \geq t_0\,.$$

Ist $e \in \mathbb{R}^N$ nun ein beliebiger Einheitsvektor, d.h. mit $|e| = 1$, so können wir speziell $x_0 = e\delta/2$ wählen und erhalten damit

$$\|\Psi(t, t_0)\| = \sup\big\{|\Psi(t, t_0)e| \colon e \in \mathbb{R}^N \text{ mit } |e| = 1\big\} < 2\delta^{-1} \qquad \text{für alle } t \geq t_0\,.$$

Setzen wir also $K(t_0) := 2\delta^{-1}(t_0)$, so folgt die behauptete Normbeschränktheit von $\Psi(t, t_0)$ durch $K(t_0)$ für alle $t \geq t_0$.

Existiert umgekehrt zu jedem $t_0 > t_-$ eine Konstante $K(t_0)$, so dass $\|\Psi(t, t_0)\| \leq K(t_0)$ für alle $t \geq t_0$ gilt, so ist die triviale Lösung $\mu_{hom} \equiv 0$ auch stabil: zu vorgegebenen $\varepsilon > 0$ sehen wir für die Wahl $\delta(\varepsilon, t_0) := \varepsilon K(t_0)^{-1}$ nämlich, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^N$ mit $|x_0| < \delta$ die Abschätzung

$$|u(t; t_0, x_0) - 0| = |\Psi(t, t_0)x_0| \leq \|\Psi(t, t_0)\||x_0| < K(t_0)\varepsilon K(t_0)^{-1} = \varepsilon \qquad \text{für alle } t \geq t_0\,,$$

also Stabilität, gilt.

(ii) Ist $\mu_{hom} \equiv 0$ eine attraktive Lösung, so gibt es zu jedem $t_0 > t_-$ ein $\tilde{\delta}(t_0) > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: für alle $x_0 \in \mathbb{R}^N$ mit $|x_0| < \tilde{\delta}$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} u(t; t_0, x_0) = \lim_{t\to\infty} \Psi(t, t_0)x_0 = 0\,.$$

Mit den Wahlen $x_{0,j} := e_j\tilde{\delta}/2$ mit $e_j \in \mathbb{R}^N$ dem j-ten Koordinateneinheitsvektor, $j \in \{1, \dots, N\}$, folgt daher

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \|\Psi(t, t_0)\| &= \sup\big\{|\Psi(t, t_0)e|\colon e \in \mathbb{R}^N \text{ mit } |e| = 1\big\}\\ &\le \lim_{t\to\infty} \sum_{j=1}^N |\Psi(t, t_0)e_j| = 2\tilde{\delta}^{-1} \sum_{j=1}^N \lim_{t\to\infty} |\Psi(t, t_0)x_j| = 0\,,\end{aligned}$$

also $\Psi(t, t_0) \to \mathbb{O}_{N\times N}$ bei $t \to \infty$.

Gilt umgekehrt zu jedem $t_0 > t_-$ die Konvergenz $\Psi(t, t_0) \to \mathbb{O}_{N\times N}$ bei $t \to \infty$, so folgt für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^N$ bereits

$$\lim_{t\to\infty} |u(t; t_0, x_0)| = \lim_{t\to\infty} |\Psi(t, t_0)x_0| \le \lim_{t\to\infty} \|\Psi(t, t_0)\||x_0| = 0\,,$$

also ist $\mu_{hom} \equiv 0$ tatsächlich attraktiv, und zwar für jede Wahl von $\tilde{\delta} > 0$. □

Satz 6.10 (Attraktivität und Stabilität bei linearen Systemen)**.** *Seien $A \in C((t_-, \infty), \mathbb{R}^{N\times N})$ und $b \in C((t_-, \infty), \mathbb{R}^N)$ für ein $t_- \in [-\infty, \infty)$. Ist $\mu\colon (t_-, \infty) \to \mathbb{R}^N$ eine attraktive Lösung zu $u' = A(t)u + b(t)$, so ist μ auch stabil (und damit asymptotisch stabil).*

Beweis. Wegen Satz 6.7 ist es ausreichend, homogene Systeme mit $b \equiv 0$ und die triviale Lösung $\mu_{hom} \equiv 0$ zu betrachten. Ist μ_{hom} attraktiv und $t_0 > t_-$, so gilt nach Satz 6.9 (ii) die Konvergenz $\Psi(t, t_0) \to \mathbb{O}_{N\times N}$ bei $t \to \infty$. Zusammen mit der Stetigkeit von $\Psi(t, t_0)$ auf $[t_0, \infty)$ folgt daher die Normbeschränktheit von $\Psi(t, t_0)$, d.h. es existiert eine Konstante $K(t_0)$ mit $\|\Psi(t, t_0)\| \le K(t_0)$ für alle $t \ge t_0$. Wegen Satz 6.9 (i) ist dies bereits äquivalent zur Stabilität von μ_{hom}, und die Aussage des Satzes ist bewiesen. □

Für den speziellen Fall, dass A eine konstante Matrix in $\mathbb{R}^{N\times N}$ ist, haben wir in Satz 4.28 bereits die algebraische Feinstruktur des Lösungsraums für das homogene, lineare Gleichungssystem $u' = Au$ kennengelernt. Daher können wir Stabilität und Attraktivität nun auch über die Eigenwerte von A charakterisieren (vgl. Beispiel 6.3 für den zweidimensionalen Fall).

Satz 6.11 (Kriterium für Stabilität mittels Eigenwerte)**.** *Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Die triviale Lösung $\mu_{hom} \equiv 0$ des homogenen Systems $u' = Au$ (und damit jede Lösung des homogenen Systems sowie des inhomogenen Systems für stetige Inhomogenitäten) ist genau dann*

(i) stabil*, falls alle Eigenwerte von A nicht-positiven Realteil haben und für die Eigenwerte mit Realteil 0 die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen Vielfachheit ist. In diesem Fall existiert eine Konstante K mit*

$$\|\exp(tA)\| \le K \qquad \text{für alle } t \ge 0\,;$$

(ii) asymptotisch stabil*, falls alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben. In diesem Fall gibt es zu jedem*

$$\alpha \in \big(0, -\max\{\lambda\colon \lambda \text{ ist Realteil eines Eigenwertes von } A\}\big)$$

eine Konstante $K(\alpha)$ mit

$$\|\exp(tA)\| \le K(\alpha)\exp(-\alpha t) \qquad \text{für alle } t \ge 0\,.$$

Beweis. Nach Satz 4.28 über die algebraische Feinstruktur des Lösungsraums von $u' = Au$ enthält jedes Fundamentalsystem nur Funktionen der Form

$$\exp(\lambda t)p(t) \quad \text{bzw.} \quad \exp(\lambda t)\big[\cos(\mu t)q(t) - \sin(\mu t)\tilde{q}(t)\big]$$

wobei λ bzw. $\lambda \pm \mathrm{i}\,\mu$ reelle bzw. komplexe Eigenwerte von A sind und $p, q, \tilde{q}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ Funktionen sind, deren Komponenten Polynome vom Grad höchstens N sind, die sich im Fall, dass die algebraische und geometrische Vielfachheit des Eigenwerts übereinstimmen, auf Konstanten reduzieren. Im Folgenden werden wir nun die beiden Tatsachen ausnutzen, dass

$$\lim_{t\to\infty} \exp(\lambda t)p(t) = 0 \qquad \text{für jedes } \lambda < 0$$

und ein beliebiges Polynom p gilt und dass die Übergangsmatrix $\exp(tA)$ aus jeder gegebenen Fundamentalmatrix durch Multiplikation mit einer konstanten, regulären Transformationsmatrix gewonnen werden kann, vgl. Satz 4.10.

(i) Wenn alle Eigenwerte von A nicht-positiven Realteil haben und für die Eigenwerte mit Realteil 0 die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen Vielfachheit ist, so folgt, dass das Fundamentalsystem, das nur aus Funktionen wie den oben angegebenen besteht, bei $t \to \infty$ beschränkt bleibt. Da somit die Übergangsmatrix bei $t \to \infty$ auch beschränkt bleibt, gilt nach Satz 6.9 (i) in diesem Fall Stabilität. Ist diese Bedingung dagegen nicht erfüllt, so bleibt mindestens eine der oben angegebenen Funktionen bei $t \to \infty$ nicht beschränkt und es gilt Instabilität.

(ii) Entsprechend ist die Bedingung, dass alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben äquivalent dazu, dass $\Psi(t, 0) \to \mathbb{O}_{N\times N}$ bei $t \to \infty$ gilt, was nach Satz 6.9 (ii) Attraktivität und damit asymptotische Stabilität impliziert.

Für den Beweis der behaupteten exponentiellen Abschätzung braucht man lediglich zu beachten, dass für eine solche Wahl von α gilt:

$$\alpha + \lambda < 0\,, \quad \text{falls } \lambda \text{ der Realteil eines Eigenwerts von } A \text{ ist}\,,$$

und damit ist für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$t \mapsto t^k \exp((\alpha + \lambda)t) \quad \text{eine stetige und beschränkte Funktion auf } [0, \infty)\,.$$

Folglich gilt $t^k \exp(\lambda t) \le \widetilde{K}(k, \alpha) \exp(-\alpha t)$ für eine Konstante $\widetilde{K}(k, \alpha)$ und alle $t \ge 0$, und wendet man diese Beschränktheit nun auf alle oben angegebenen Vektor-wertigen Funktionen an, so gewinnt man

$$\|\exp(tA)\| \le K(\alpha) \exp(-\alpha t) \qquad \text{für alle } t \ge 0$$

für eine Konstante $K(\alpha)$. □

6.3 Linearisierte asymptotische Stabilität

Da wir nun das Stabilitätsverhalten linearer Systeme mit konstanten Koeffizienten kennen, können wir in einigen Fällen zumindest das Stabilitätsverhalten der Ruhelagen für nicht-lineare Systeme untersuchen, indem wir die Stabilität der Linearisierung um die Ruhelage bestimmen. Der Einfachheit halber erklären wir die Idee nur für autonome Systeme

$$u' = f(u) \qquad \text{für } f \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)\,.$$

Um die Stabilität einer Ruhelage $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ (d.h. es gilt $f(\bar{x}_0) = 0$) zu untersuchen, entwickeln wir f um die Ruhelage $\bar{x}_0$ und erhalten so die Gleichung

$$u' = (u - \bar{x}_0)' = f(u) = \underbrace{f(\bar{x}_0)}_{=0} + \underbrace{Df(\bar{x}_0)(u - \bar{x}_0)}_{\text{linearer Anteil}} + r(u - \bar{x}_0; \bar{x}_0)\,.$$

Wegen des Satzes von Taylor gilt für den nichtlinearen Anteil $r(\,\cdot\,;\bar{x}_0) \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ mit $r(0;\bar{x}_0) = 0$ und $Dr(0;\bar{x}_0) = 0$. Wir haben formal also ein lineares System für die Funktion $u - \bar{x}_0$ (und auch u) gefunden, mit einer konstanten Koeffizientenfunktion $Df(\bar{x}_0)$ und einer stetigen Inhomogenität, die aber von der Lösung selbst abhängt. Ist $u(\,\cdot\,;x_0)$ nun die eindeutige Lösung von $u' = f(u)$ mit Anfangswert $u(0) = x_0 \in \mathbb{R}^N$, so erhalten wir aus Satz 4.15 die implizite Darstellungsformel

$$u(t;x_0) - \bar{x}_0 = \exp(tA)(x_0 - \bar{x}_0) + \int_0^t \exp((t-s)A) r(u(s;x_0) - \bar{x}_0; \bar{x}_0)\, ds$$

für alle $t \in I_{\max}(x_0)$. Im Allgemeinen können wir über diese Formel die Lösung zwar nicht direkt bestimmen, jedoch erlaubt diese mittels des Lemmas von Gronwall Abschätzungen, die auf das Stabilitätsverhalten schließen lassen. Als Vorbereitung beweisen wir zunächst:

Satz 6.12 (über linearisierte asymptotische Stabilität)**.** *Seien $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $D \subset \mathbb{R}^{1+N}$ offen mit $[0,\infty)\times B_R(0) \subset D$ für ein positives R und $r \in C^1(D, \mathbb{R}^N)$ eine Funktion mit*

$$\lim_{|x|\to 0} \frac{|r(t,x)|}{|x|} = 0 \qquad \textit{gleichmäßig für alle } t \geq 0\,, \tag{6.1}$$

und damit insbesondere mit $r(t,0) = 0$ für alle $t \geq 0$. Haben alle Eigenwerte von A negativen Realteil, so ist die triviale Lösung $\mu \equiv 0$ des Systems

$$u' = Au + r(t,u)$$

asymptotisch stabil.

Beweis. Schritt 1: Vorüberlegungen. Da die Eigenwerte von A alle negativen Realteil haben, finden wir mithilfe von Satz 6.11 (ii) ein $\alpha > 0$, so dass

$$\|\exp(tA)\| \leq K \exp(-\alpha t) \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

und eine Konstante $K = K(\alpha)$ gilt. Wegen der Voraussetzung an die Funktion r können wir dann einen Radius $\rho = \rho(\alpha, K) \in (0,R)$ bestimmen, so dass

$$|r(t,x)| \leq \frac{\alpha}{2K}|x| \qquad \text{für alle } t \geq 0 \text{ und alle } x \in \mathbb{R}^N \text{ mit } |x| \leq \rho$$

gilt. Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^N$ mit $|x_0| < \rho$ definieren wir außerdem eine "Austrittszeit" der in x_0 gestarteten Lösung aus der Menge $\overline{B}_\rho(0)$ über

$$T^*(x_0) := \sup\left\{T > 0\colon |u(t;x_0)| \leq \rho \text{ für alle } t \in [0,T]\right\}.$$

Schritt 2: Abschätzung der Lösungen bis zur Austrittszeit mittels

$$|u(t;x_0)| \leq K|x_0| \exp(-\alpha t/2) \qquad \textit{für alle } t \in [0, T^*(x_0)) \textit{ und } x_0 \in B_\rho(0)\,. \tag{6.2}$$

Aus der Tatsache, dass u eine lineare Gleichung mit konstanter Koeffizientenmatrix A und (der von u abhängigen) Inhomogenität $r(t,u)$ löst, folgern wir aus Satz 4.15 zunächst die (implizite) Darstellungsformel

$$u(t;x_0) = \exp(tA)x_0 + \int_0^t \exp((t-s)A) r(s, u(s;x_0))\, ds\,.$$

Für $t \in [0, T^*(x_0))$ können wir alle Terme mithilfe der Wahlen von α, K und ρ aus Schritt 1 abschätzen und erhalten so

$$\begin{aligned}
|u(t;x_0)| &\leq \|\exp(tA)\||x_0| + \int_0^t \|\exp((t-s)A)\||r(s,u(s;x_0))|\, ds \\
&\leq K\exp(-\alpha t)|x_0| + \int_0^t \exp(-\alpha(t-s))\frac{\alpha}{2K}|u(s;x_0)|\, ds \\
&\leq K\exp(-\alpha t)|x_0| + \frac{\alpha}{2}\exp(-\alpha t)\int_0^t \exp(-\alpha s)|u(s;x_0)|\, ds\,,
\end{aligned}$$

woraus wir

$$\exp(\alpha t)|u(t;x_0)| \le K|x_0| + \frac{\alpha}{2}\int_0^t \exp(-\alpha s)|u(s;x_0)|\,ds$$

folgern. Mit dem Lemma 3.24 von Gronwall, angewandt auf die stetige Funktion $w(t) := \exp(\alpha t)|u(t;x_0)|$, schließen wir dann

$$\exp(\alpha t)|u(t;x_0)| \le K|x_0|\exp(\alpha t/2)$$

für $t \in [0, T^*(x_0))$, was äquivalent zur Behauptung (6.2) ist.

Schritt 3: Beweis der asymptotischen Stabilität. Wir profitieren nun davon, dass die rechte Seite der Abschätzung in (6.2) monoton fallend in t ist und im Limes $t \to \infty$ verschwindet. Dies erlaubt uns, zunächst "gute" Anfangswerte $x_0 \in \mathbb{R}^N$ zu finden: gilt nämlich $x_0 \in B_{\rho/2K}(0)$, so folgt

$$|u(t;x_0)| < K\frac{\rho}{2K}\exp(-\alpha t/2) \le \frac{\rho}{2} \qquad \text{für alle } t \in [0, T^*(x_0))\,,$$

und dies ist nach Definition von $T^*(x_0)$ nur dann möglich, wenn $T^*(x_0) = \infty$ gilt. Dies bedeutet nichts anderes, als dass alle Lösungen $u(t;x_0)$ für $x_0 \in B_{\rho/2K}(0)$ auf ganz $\mathbb{R}_0^+$ existieren, was wesentlich für den Nachweis von Attraktivität und Stabilität ist. Es folgen nun

- *Attraktivität*, denn für alle $x_0 \in B_{\rho/2K}(0)$ gilt wegen Schritt 2 nun tatsächlich

$$|u(t;x_0)| \le \frac{\rho}{2}\exp(-\alpha t/2) \to 0 \qquad \text{bei } t \to \infty\,;$$

- *Stabilität*, denn für jedes $\varepsilon > 0$ erfüllt die Lösung $u(\,\cdot\,;x_0)$ mit Startwert $x_0 \in B_\delta(0)$ für die Wahl $\delta := \min\{\varepsilon, \rho\}/(2K)$ die Abschätzung

$$|u(t;x_0)| \le K\frac{\min\{\varepsilon,\rho\}}{2K}\exp(-\alpha t/2) < \varepsilon\,. \qquad \square$$

Korollar 6.13 (über linearisierte asymptotische Stabilität für autonome Systeme)**.** *Seien $D' \subset \mathbb{R}^N$ offen und $f \in C^1(D', \mathbb{R}^N)$. Ist $\bar{x}_0 \in D'$ eine Nullstelle von f, so dass alle Eigenwerte von $Df(\bar{x}_0)$ negativen Realteil haben, so ist die Lösung $\mu \equiv \bar{x}_0$ des autonomen Systems*

$$u' = f(u)$$

asymptotisch stabil.

Beweis. Mit der Entwicklung um die Ruhelage $\bar{x}_0$ wie am Anfang des Abschnitts können wir das autonome System umschreiben als

$$(u - \bar{x}_0)' = A(u - \bar{x}_0) + r(u - \bar{x}_0; \bar{x}_0)$$

mit $A = Df(\bar{x}_0)$ und einer Funktion $r \in C^1(D' - \bar{x}_0, \mathbb{R}^N)$ mit $r(0;\bar{x}_0) = 0$ und $Dr(0;\bar{x}_0) = 0$. Wir möchten nun Satz 6.12 mit $D = \mathbb{R} \times (D' + \bar{x}_0)$ auf das System

$$v = Av + r(v;\bar{x}_0)$$

anwenden. Um die Voraussetzung 6.1 an r zu verifizieren, betrachten wir ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Dazu bestimmen wir ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(0) \subset D'$, so dass $\|Dr(x)\| \le \varepsilon$ für alle $x \in B_\delta(0)$ gilt. Mit dem Mittelwertsatz folgt dann schon

$$|r(x)| \le \varepsilon|x| \qquad \text{für alle } x \in B_\delta(0)\,,$$

und wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ gilt 6.1. Da alle Eigenwerte von A nach Voraussetzung negativen Realteil haben, zeigt die Anwendung von Satz 6.12, dass die triviale Lösung $v \equiv 0$ asymptotisch stabil ist, und dies impliziert, dass die Lösung $\mu \equiv \bar{x}_0$ für das ursprüngliche System $u' = f(u)$ asymptotisch stabil ist. $\square$

Bemerkungen 6.14.

(i) *Besitzt $Df(\bar{x}_0)$ einen Eigenwert mit positivem Realteil, so kann man zeigen, dass die Lösung $\mu \equiv \bar{x}_0$ instabil ist, siehe [6].*

(ii) *Besitzt $Df(\bar{x}_0)$ Eigenwerte mit verschwindendem Realteil und sonst nur solche mit negativem Realteil, so ist im Gegensatz zu linearen Systemen im Allgemeinen keine Aussage möglich (unabhängig von der geometrischen Vielfachheit des Eigenwerts). Das Stabilitätsverhalten hängt hier von der Art der Nichtlinearität, und zwar selbst schon für skalare Gleichungen erster Ordnung: die triviale Lösung $\mu \equiv 0$ ist*

- *für die Gleichung $u' = -u^3$* asymptotisch stabil *(mit Lösung $u(t; x_0) = \operatorname{sign}(x_0)(x_0^{-2} + t)^{-1/2}$ für jedes x_0),*
- *für die Gleichung $u' = 0$* stabil, *aber nicht asymptotisch stabil (mit Lösung $u(t; x_0) = x_0$ für jedes x_0),*
- *für die Gleichung $u' = u^2$* instabil *(mit Lösung $u(t; x_0) = (x_0^{-1} - t)^{-1}$ für $x_0 \neq 0$, wobei die Lösungen für $x_0 > 0$ nur auf $(-\infty, x_0^{-1})$ existieren),*

(die Lösungsformeln findet man hier jeweils mit Trennung der Variablen).

6.4 Ljapunovfunktionen und die direkte Methode

Als Abschluss wollen wir für autonome Systeme $u' = f(u)$ noch eine effektive Methode kennenlernen, um die Ruhelagen auf Stabilität zu untersuchen.

Definition 6.15. *Seien $D' \subset \mathbb{R}^N$ offen und $f \in C(D', \mathbb{R}^N)$. Eine Funktion $V \in C^1(D')$ heißt* Ljapunovfunktion *für die Gleichung $u' = f(u)$, falls*

$$\nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0 \qquad \text{für alle } x \in D' \text{ gilt,}$$

d.h. falls die Richtungsableitung von V entlang des Vektorfeldes f nicht-positiv ist.

Bemerkung 6.16. *Ist $u \in C^1(I, D')$ für ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ eine Lösung zu $u' = f(u)$, so gilt mit der Kettenregel*

$$\frac{d}{dt} V(u(t)) = \nabla V(u(t)) \cdot u'(t) = \nabla V(u(t)) \cdot f(u(t)) \leq 0$$

auf I, und damit ist $t \mapsto V(u(t))$ eine monoton fallende Funktion. Aus diesem Grund wird $\nabla V(x) \cdot f(x)$ manchmal auch mit $\dot{V}(x)$ notiert, da man sich im Wesentlichen für die Ableitung von $V(u(t))$ nach der Zeitvariable interessiert.

Beispiele 6.17.

(i) Skalare Gleichungen (d.h. $N = 1$)*: Ist F eine Stammfunktion von $f \in C(\mathbb{R})$, so ist $V := -F$ eine Ljapunovfunktion für die Gleichung $u' = f(u)$, denn es gilt*

$$\nabla V(x) \cdot f(x) = V'(x) f(x) = -f(x)^2 \leq 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,.$$

(ii) Ebene Systeme (d.h. $N = 2$): *Besitzt das System $u' = f(u)$ mit $f \colon D' \to \mathbb{R}^2$ Lipschitz-stetig ein erstes Integral, also eine Funktion $F \colon D' \to \mathbb{R}$ mit*

$$\nabla F(x) \cdot f(x) = \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2) = 0 \qquad \text{für alle } x \in D'\,,$$

so ist dies offensichtlich auch eine Ljapunovfunktion für das System $u' = f(u)$. Damit sind Ljapunovfunktionen Verallgemeinerungen von (Hamiltonschen Funktionen und) ersten Integralen.

(iii) *In den Übungen wurde mithilfe von Polarkoordinaten das autonome System*

$$\begin{cases} u_1' = & u_2 + u_1(1 - u_1^2 - u_2^2) \\ u_2' = & -u_1 + u_2(1 - u_1^2 - u_2^2) \end{cases}$$

auf $D' = \mathbb{R}^2$ *untersucht. Für* $V(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2$ *gilt*

$$\begin{aligned} \nabla F(x) \cdot f(x) &= 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{pmatrix} \\ &= 2\big(x_1^2(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_2^2(1 - x_1^2 - x_2^2)\big) = 2|x|^2(1 - |x|^2) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^2$*, und daher ist* $V_>(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2$ *eine Ljapunovfunktion für das System auf* $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}_1(0)$*, und* $V_<(x_1, x_2) := -x_1^2 - x_2^2$ *eine Ljapunovfunktion für das System auf* $B_1(0)$*. Solche "lokalen" Ljapunovfunktionen reichen für Stabilitätsuntersuchungen typischerweise aus, wie wir später sehen werden (und dies liegt daran, dass Stabilität bzw. Instabilität selbst eine lokale Eigenschaft ist).*

Satz 6.18 (Subniveaumengen von Ljapunovfunktionen)**.** *Seien* $D' \subset \mathbb{R}^N$ *offen,* $f\colon D' \to \mathbb{R}^N$ *Lipschitz-stetig und* $V \in C^1(D')$ *eine Ljapunovfunktion für die Gleichung* $u' = f(u)$*. Für jedes* $x_0 \in D'$ *gilt dann*

$$\mathcal{O}^+(x_0) \subset \{x \in D' \colon V(x) \le V(x_0)\}$$

(und man sagt, dass die Subniveaumengen von Ljapunovfunktionen positiv invariant *bezüglich* $u' = f(u)$ *sind).*

Beweis. Diese Aussage folgt direkt aus der in Bemerkung 6.16 hergeleiteten Tatsache, dass die Funktion $t \mapsto V(u(t))$ monoton fallend ist, denn damit gilt für $t \in [0, I^+(x_0))$

$$V(u(t; x_0)) \le V(u(0; x_0)) = V(x_0)\,. \qquad \square$$

In Satz 5.10 haben wir für autonome Gleichungen die α- und ω-Grenzmengen bereits über (Schnitte von) Halborbits beschrieben. Nun können wir die ω-Grenzmenge auch über Ljapunovfunktionen beschreiben:

Satz 6.19 (ω-Grenzmengen mittels Ljapunovfunktionen)**.** *Seien* $D' \subset \mathbb{R}^N$ *offen,* $f\colon D' \to \mathbb{R}^N$ *Lipschitz-stetig und* $V \in C^1(D')$ *eine Ljapunovfunktion für die Gleichung* $u' = f(u)$*. Für jedes* $x_0 \in D'$ *gilt*

$$\omega(x_0) \subset \{x \in D' \colon \nabla V(x) \cdot f(x) = 0\}\,.$$

Beweis. Sei $x^* \in \omega(x_0) \subset D'$ ein ω-Grenzpunkt zu x_0, d.h. es gibt eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $[0, \infty)$ mit

$$\lim_{k\to\infty} t_k = \infty \qquad \text{und} \qquad x^* = \lim_{k\to\infty} u(t_k; x_0)\,.$$

Aus der Tatsache, dass $t \mapsto V(u(t))$ monoton fallend ist, und mit der Stetigkeit von V folgt daher für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$V(u(t_k; x_0)) \ge \lim_{k\to\infty} V(u(t_k; x_0)) = V\big(\lim_{k\to\infty} u(t_k; x_0)\big) = V(x^*)\,.$$

Da nach Annahme für jedes $t \ge 0$ ein Index $k(t)$ existiert mit $t \le t_{k(t)}$ schließen wir (wiederum aus der Monotonie) sogar

$$V(u(t; x_0)) \ge V(u(t_{k(t)}; x_0) \ge V(x^*) \qquad \text{für alle } t \ge 0\,. \tag{6.3}$$

Falls die Behauptung $\nabla V(x^*) \cdot f(x^*) = 0$ nicht gelten würde, so müsste nach Definition der Ljapunovfunktion die strikte Ungleichung $\nabla V(x^*) \cdot f(x^*) < 0$ gelten. Damit wäre die Funktion $t \mapsto V(u(t; x^*))$ nahe bei 0 *streng* monoton fallend, denn es gilt

$$\frac{d}{dt} V(u(t; x^*))\Big|_{t=0} = \nabla V(u(t; x^*)) \cdot f(u(t; x^*))\Big|_{t=0} = \nabla V(x^*) \cdot f(x^*) < 0\,,$$

und dementsprechend findet man ein $\tau > 0$ mit

$$V(u(\tau; x^*)) < V(u(0; x^*)) = V(x^*)\,.$$

Mit der Flusseigenschaft aus Proposition 5.1 und der stetigen Abhängigkeit von den Anfangsdaten in Satz 3.34 folgt nun

$$\lim_{k\to\infty} u(\tau + t_k; x_0) = \lim_{k\to\infty} u(\tau; u(t_k; x_0) = u(\tau; x^*)\,.$$

Daher impliziert die Stetigkeit von V

$$\lim_{k\to\infty} V(u(\tau + t_k; x_0)) = V(u(\tau; x^*)) < V(x^*)\,,$$

was im Widerspruch zu (6.3) steht. Daher folgt $\nabla V(x^*)\cdot f(x^*) = 0$ und die Behauptung ist bewiesen. □

Nun kommen wir zu der für uns wichtigsten Anwendung von Ljapunovfunktionen, nämlich der Untersuchung der Ruhelagen des autonomen Systems $u' = f(u)$ auf Stabilität, asymptotische Stabilität oder Instabilität. Wir wenden dabei die sogenannte *direkte Methode von Ljapunov* an, bei der man direkt aus der Untersuchung einer geeigneten Ljapunovfunktion auf die Stabilitätseigenschaften schließen kann, ohne die Lösungen des Systems explizit zu kennen.

Satz 6.20 (über die direkte Methode von Ljapunov)**.** *Seien $D' \subset \mathbb{R}^N$ offen, $f\colon D' \to \mathbb{R}^N$ Lipschitz-stetig und $V \in C^1(D')$ eine Ljapunovfunktion für die Gleichung $u' = f(u)$. Eine Ruhelage $\bar{x}_0 \in D'$ ist*

(i) stabil, *falls $\bar{x}_0$ ein striktes Minimum von V ist, d.h. es gilt*

$$V(x) > V(\bar{x}_0) \qquad \text{für alle } x \in D' \setminus \{\bar{x}_0\}\,;$$

(ii) asymptotisch stabil, *falls $\bar{x}_0$ ein striktes Minimum von V ist und zusätzlich*

$$\nabla V(x)\cdot f(x) < 0 \qquad \text{für alle } x \in D' \setminus \{\bar{x}_0\} \text{ gilt};$$

In diesem Fall ist für $c > V(\bar{x}_0)$ die Menge $\{x \in D' \colon V(x) \le c\}$, falls sie kompakt in D' ist, Teil des Einzugsbereichs von $\bar{x}_0$;

(iii) instabil, *falls $\bar{x}_0$ kein lokales Minimum von V ist, d.h. für jede Umgebung $U(\bar{x}_0)$ von $\bar{x}_0$ gibt es ein $\bar{x} \in U(\bar{x}_0)$ mit $V(\bar{x}) < V(\bar{x}_0)$, und zusätzlich*

$$\nabla V(x)\cdot f(x) < 0 \qquad \text{für alle } x \in D' \setminus \{\bar{x}_0\} \text{ gilt}.$$

Bemerkungen 6.21.

(i) *Für jede Ruhelage $\bar{x}_0 \in D'$ gilt $f(\bar{x}_0) = 0$ und damit automatisch $\nabla V(\bar{x}_0)\cdot f(\bar{x}_0) = 0$. Daher wurde in der Formulierung des Satzes auf eine Vorschrift an $\nabla V(x)\cdot f(x)$ für $x = \bar{x}_0$ verzichtet.*

(ii) *Da mit jeder Ljapunovfunktion $V \in C^1(D')$ auch $V - V(\bar{x}_0)$ eine Ljapunovfunktion ist, wird in der Literatur manchmal auch $V(\bar{x}_0) = 0$ vorausgesetzt.*

(iii) *Der Satz lässt sich auch einfach lokalisieren, d.h. es reicht, die (strikte) Minimaleigenschaft und das Verhalten von $\nabla V(x)\cdot f(x)$ in einer Umgebung von $\bar{x}_0$ zu kennen. Beim Nachweis von Stabilität muss man nämlich tatsächlich nur nachweisen, dass die Differenz $|u(t; x_0) - \bar{x}_0|$ für hinreichend kleine Abweichungen $|x_0 - \bar{x}_0|$ klein bleiben. Ähnlich muss man für Instabilität nur zeigen, dass eine vorgegebene Umgebung von $\bar{x}_0$ verlassen wird.*

(iv) *Die Schwierigkeit in der Anwendung der direkten Methode von Ljapunov besteht in der Regel im Finden einer geeigneten Ljapunovfunktion. Konstante Funktionen sind natürlich trivialerweise (erste Integrale und) Ljapunovfunktionen, lassen aber keine Aussage zum Stabilitätsverhalten zu. Tatsächlich gibt es kein allgemeingültiges Verfahren, um geeignete Ljapunovfunktionen zu finden (oder die Existenz einer solchen zu sichern, was die Anwendung des letzten Satzes erlaubt). Zumindest gibt es aber einige Strategien, und manchmal reicht es sogar schon, das System $u' = f(u)$ als kleine Störung einer linearen Gleichung zu betrachten (siehe etwa Beispiel 6.22).*

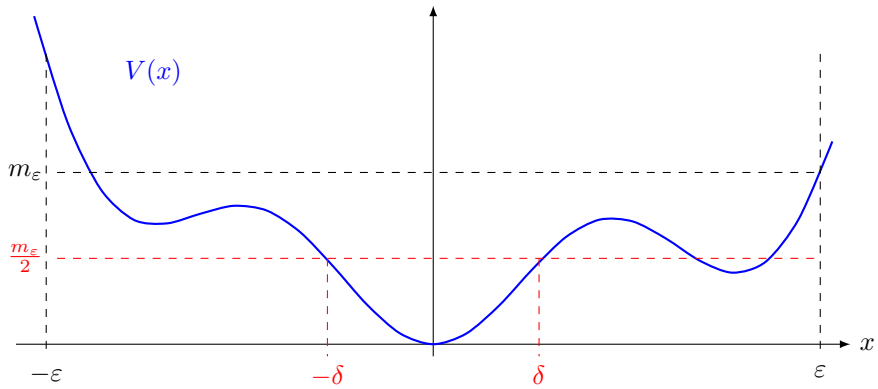
Beweis. Ohne Einschränkung dürfen wir $0 \in D'$, $\bar{x}_0 = 0$ und $V(0) = 0$ annehmen (ansonsten betrachten wir $\tilde{f}(x) := f(x + \bar{x}_0)$ und die Ljapunovfunktion $\widetilde{V}(x) := V(x + \bar{x}_0) - V(\bar{x}_0)$ zur Differentialgleichung $\tilde{u}' = \tilde{f}(\tilde{u})$ auf der offenen Menge $\widetilde{D}' := D' - \bar{x}_0$).

(i) *Nachweis der Stabilität:* Wir fixieren ein beliebiges $\varepsilon > 0$ mit $\overline{B}_\varepsilon(0) \subset D'$ und definieren

$$m_\varepsilon := \min\left\{V(x) \colon x \in \mathbb{R}^N \text{ mit } |x| = \varepsilon\right\} > 0\,.$$

Wegen der Stetigkeit der Ljapunovfunktion V sowie $V(0) = 0$ finden wir nun ein $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \varepsilon)$ mit der Eigenschaft

$$0 \le V(x) \le \frac{m_\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^N \text{ mit } |x| < \delta\,.$$



Wir zeigen nun, dass die Lösungen zu $u' = f(u)$ mit Anfangswert $x_0 \in B_\delta(0)$ auf ganz $[0, \infty)$ existieren und dort ausschließlich Werte in $B_\varepsilon(0)$ annehmen, womit die Ruhelage 0 dann stabil ist.

Sei also $x_0 \in B_\delta(0)$ gegeben. Mit dem Satz von Picard–Lindelöf und dem Satz 3.20 über die maximale Lösung existiert eine eindeutige Lösung $u(\,\cdot\,; x_0)$ der Differentialgleichung $u' = f(u)$ mit Anfangswert $u(0) = x_0$, mit maximalem Existenzintervall $(I^-(x_0), I^+(x_0))$. Mit der Monotonie von $t \mapsto V(u(t; x_0))$ wissen wir außerdem

$$V(u(t; x_0)) \le V(u(0; x_0)) = V(x_0) \le \frac{m_\varepsilon}{2}$$

für $t \in [0, I^+(x_0))$. Nach Definition von m_ε muss $u(t; x_0) \in B_\varepsilon(0)$ für alle $t \in [0, I^+(x_0))$ gelten, also ist $\mathcal{O}^+(x_0)$ insbesondere in einer kompakten Menge des Definitionsbereichs D' enthalten, so dass $I^+(x_0) = \infty$ aus Satz 5.3 (iii) und damit die behauptete Stabilität folgt.

(ii) *Nachweis der asymptotischen Stabilität:* Wir fixieren $x_0 \in B_\delta(0)$ mit $\delta > 0$ wie in (i). Damit wissen wir also, dass die Lösung $u(\,\cdot\,; x_0)$ auf ganz $[0, \infty)$ existiert, dort nur Werte in $B_\varepsilon(0)$ annimmt, und wir wollen nun zeigen, dass sogar

$$\lim_{t \to \infty} u(t; x_0) = 0$$

gilt, womit wir dann auch die Attraktivität der Ruhelage 0 gezeigt hätten.

Nach Voraussetzung ist $t \mapsto V(u(t; x_0))$ nicht-wachsend und nach unten durch 0 beschränkt, also existiert $V_0 \ge 0$ mit

$$V_0 = \lim_{t \to \infty} V(u(t; x_0))\,.$$

Mit dem Mittelwertsatz finden wir daher eine Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $[0, \infty)$ mit

$$\lim_{k \to \infty} t_k = \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{k \to \infty} \frac{d}{dt} V(u(t_k; x_0)) = \lim_{k \to \infty} \nabla V(u(t_k; x_0)) \cdot f(u(t_k; x_0)) = 0\,.$$

(diese Folge kann man konstruieren, indem man $T_0 \geq 1$ fixiert, so dass $V_0 \leq V(u(t;x_0)) \leq V_0+1$ für alle $t \geq T_0$ gilt und dann für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit dem Mittelwertsatz ein $t_k \in [kT_0, kT_0+k]$ bestimmt mit $0 \leq \frac{d}{dt}V(u(t_k;x_0)) = (V(u(kT_0;x_0)) - V(u(kT_0+k;x_0)))/n \leq 1/n$). Da $|u(t_k;x_0)| < \varepsilon$ wegen der Stabilität gilt, können wir (nach Übergang auf eine Teilfolge) außerdem annehmen, dass

$$\lim_{k\to\infty} u(t_k;x_0) = \hat{x}_0 \qquad \text{für ein } \hat{x}_0 \in \overline{B}_\varepsilon(0)$$

gilt. Wegen der Stetigkeit von ∇V und f gilt dann aber

$$0 = \lim_{k\to\infty} \nabla V(u(t_k;x_0)) \cdot f(u(t_k;x_0)) = \nabla V(\hat{x}_0) \cdot f(\hat{x}_0)\,,$$

und dies ist nach Voraussetzung lediglich für $\hat{x}_0 = 0$ möglich. Damit konvergiert also zumindest eine Teilfolge von $(u(t;x_0))_{t\geq 0}$ bei $t \to \infty$ gegen 0. Daraus folgt $V_0 = 0$, und weil 0 striktes Minimum von V war, auch die behauptete Konvergenz $u(t;x_0) \to 0$ für $t \to \infty$.

Beweis der Aussage über den Einzugsbereich: Ist die Menge $D'_c := \{x \in D' \colon V(x) \leq c\}$ für ein beliebiges $c > 0$ kompakt in D', so kann man die Argumente von oben im Wesentlichen wiederholen: nach Satz 6.18 gilt für jede maximale Lösung, die in einem Punkt $x_0 \in D'_c$ startet, $\mathcal{O}^+(x_0) \subset D'_c$ und nach Satz 5.3 somit $I^+(x_0) = \infty$. In den Beweis der Konvergenzaussage $\lim_{t\to\infty} u(t;x_0) = 0$ ging die genaue ε-δ Beziehung dann gar nicht mehr ein, so dass D'_c also tatsächlich Teil des Einzugsbereichs von 0 ist.

(iii) *Nachweis der Instabilität:* Angenommen, 0 wäre eine stabile Ruhelage. Dann würde zu jedem $\varepsilon > 0$ mit $\overline{B}_\varepsilon(0) \subset D'$ ein $\delta > 0$ existieren, so dass für alle $x_0 \in B_\delta(0)$ die Lösung $u(\,\cdot\,;x_0)$ auf ganz $[0,\infty)$ existiert und

$$|u(t;x_0)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

erfüllt. Da 0 nach Voraussetzung keine Minimum von V ist, finden wir zunächst ein $\hat{x}_0 \in B_\delta(0)$ mit $V(\hat{x}_0) < V(0) = 0$ und dann wegen der Stetigkeit von V ein $\hat{\varepsilon} < \varepsilon$ mit

$$V(x) > V(\hat{x}_0) \qquad \text{für alle } x \in B_{\hat{\varepsilon}}(0)\,.$$

Aus der Tatsache, dass $t \mapsto V(u(t;\hat{x}_0))$ monoton fallend ist, schließen wir

$$V((u(t;\hat{x}_0)) \leq V(\hat{x}_0) \qquad \text{für alle } t \geq 0\,, \tag{6.4}$$

also muss $|u(t;\hat{x}_0)| \geq \hat{\varepsilon}$ für alle $t \geq 0$ gelten. Andererseits wissen wir aus der angenommenen Stabilität bereits $|u(t;\hat{x}_0)| \leq \varepsilon$, so dass insgesamt

$$\mathcal{O}(\hat{x}_0) \subset \overline{B_\varepsilon(0) \setminus B_{\hat{\varepsilon}}(0)}$$

gelten muss. Da diese Menge kompakt ist sowie den Ursprung nicht enthält und $\nabla V \cdot f$ nach Annahme negativ außerhalb des Ursprungs ist, gilt also

$$M_V := \max\left\{\nabla V(x) \cdot f(x) \colon x \in \overline{B_\varepsilon(0) \setminus B_{\hat{\varepsilon}}(0)}\right\} < 0\,.$$

Daher folgt

$$\begin{aligned} V(u(t;\hat{x}_0)) &= V(\hat{x}_0) + \int_0^t \frac{d}{ds} V(u(s;\hat{x}_0))\,ds \\ &= V(\hat{x}_0) + \int_0^t \nabla V(u(s;\hat{x}_0)) \cdot f(u(s;\hat{x}_0))\,ds \leq V(\hat{x}_0) + M_V t \quad \to -\infty \quad \text{bei } t \to \infty\,. \end{aligned}$$

Dies widerspricht (6.4), und damit ist die Ruhelage 0 wie behauptet instabil. □

Beispiel 6.22 (Pendelgleichung mit Reibungsterm)**.** *In der Einleitung haben wir bereits das mathematische Pendel kennenlernt und die Bewegung über eine Differentialgleichung für den Winkel $u(t)$ beschrieben. Berücksichtigen wir zusätzlich einen möglichen Reibungsterm, so erhalten wir die (normierte) Gleichung*

$$u'' + r(u') + \sin(u) = 0\,,$$

wobei wir annehmen, dass $r \in C^1(\mathbb{R})$

$$r(0) = 0\,, \quad r'(x) \geq 0 \quad \text{und} \quad r(x)x \geq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

erfüllt. Diese Bedingung sind dadurch gerechtfertigt, dass in Ruhe keine Reibung wirken soll, bei höherer Geschwindigkeit auch eine größere Reibung auftreten soll und die Reibung grundsätzlich der Geschwindigkeit entgegen wirkt. Beispiele für zulässige Reibungstermine sind damit insbesondere

$$r(x) = 0\,, \quad r(x) = cx \quad \text{oder} \quad r(x) = cx^3$$

für eine positive Konstante c und alle $x \in \mathbb{R}$. Formen wir diese Gleichung zweiter Ordnung als ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung (mit u_1 und u_2 anstelle von u und u') um, so erhalten wir das autonome System

$$\begin{cases} u_1' = & u_2 \\ u_2' = & -r(u_2) - \sin(u_1) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad u' = f(u) \quad \text{mit} \quad f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -r(x_2) - \sin(x_1) \end{pmatrix}.$$

Die Ruhelagen dieses Systems sind genau die Punkte

$$(k\pi, 0) \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Wegen der 2π-Periodizität von f bezüglich der x_1-Variable haben alle Ruhelagen für gerade k das gleiche Stabilitätsverhalten wie die Ruhelage $(0,0)$, und alle Ruhelagen für ungerade k das gleiche Stabilitätsverhalten wie die Ruhelage $(\pi, 0)$. Wir können uns daher im Folgenden auf die Untersuchung der Ruhelagen $(0,0)$ und $(\pi,0)$ beschränken. Die intuitive Vorstellung ist, dass die obere Ruhelage $(\pi,0)$ instabil sein sollte, da bei noch so kleiner Abweichung von der Ruhelage eine große Pendelbewegung beginnt. Die untere Ruhelage dagegen sollte im Allgemeinen stabil sein, da bei kleiner Abweichung von der Ruhelage eine kleine Pendelbewegung startet, und diese kann bei Auftreten von Reibung im Limes $t \to \infty$ wieder zur Ruhe kommen. Dies wollen wir nun mathematisch verifizieren.

Untersuchung der Ruhelagen über Linearisierung: *Wir berechnen zunächst Df und bestimmen dann die Eigenwerte in den Ruhelagen. Es gilt*

$$Df(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x_1) & -r'(x_2) \end{pmatrix} \qquad \text{und damit} \qquad Df(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{k+1} & -r'(0) \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom dieser Matrix ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 + r'(0)\lambda + (-1)^k$$

mit den (komplexen) Nullstellen

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\Big(-r'(0) \pm \sqrt{r'(0)^2 - 4(-1)^k}\Big)\,.$$

- *Ruhelage $(0,0)$: beide Eigenwerte von $Df(0,0)$ haben wegen $r'(0) \geq 0$ nicht-positiven Realteil.*
  - *Für $r'(0) = 0$ (dies tritt insbesondere im reibungsfreien Fall $r \equiv 0$, aber auch für $r(x) = cx^3$ auf) haben beide Eigenwerte Realteil 0 und daher ist über Korollar* 6.13 keine Aussage möglich.
  - *Für $r'(0) > 0$ haben beide Eigenwerte negativen Realteil und es gilt nach Korollar* 6.13 *daher* asymptotische Stabilität.

- *Ruhelage* $(\pi, 0)$*: beide Eigenwerte sind reell mit* $\lambda_- < 0 < \lambda_+$*, und die Existenz des positiven Eigenwertes bedeutet nach Bemerkung* 6.14 Instabilität.

Untersuchung der Ruhelagen über die direkte Methode von Ljapunov: *Um eine geeignete Ljapunov-Funktion für die Untersuchung der Stabilität der Ruhelagen zu finden, können wir das System als Störung der reibungsfreien Situation* $r \equiv 0$ *auffassen, schließlich interessieren wir uns in erster Linie für Lösungen mit kleinem* u_2*. Für diesen Fall haben wir in Beispiel* 5.18 *die Hamilton-Funktion*

$$H(x_1, x_2) = -\cos(x_1) + 1 + \frac{1}{2}x_2^2$$

bestimmt, die man als Gesamtenergie (also Summe aus potentieller und kinetischer Energie) auffassen kann, die nötig ist, um einen Massepunkt aus dem Ursprung in die Position (x_1, x_2) *zu bringen. Tatsächlich gilt nun*

$$\nabla H(x_1, x_2) \cdot f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sin(x_1) \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin(x_1) - r(x_2) \end{pmatrix} = -x_2 r(x_2) \leq 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}^2$*, also ist* H *eine Ljapunovfunktion für* $u' = f(u)$*.*

- *Ruhelage* $(0, 0)$*: Wegen* $H(0, 0) = 0 < H(x_1, x_2)$ *für alle* $(x_1, x_2) \neq 0$ *mit* $|x_1| < 2\pi$ *ist* $(0, 0)$ *striktes lokales (und globales) Minimum. Unabhängig vom Auftreten des Reibungsterms gilt also nach Satz* 6.20 *immer* Stabilität.
  - *Für* $r(x)x \geq 0$ *kann man im Allgemeinen nicht mehr als die Stabilität folgern (zu beachten ist hier, dass die Lösungen im reibungsfreien Fall* $r \equiv 0$ *periodisch sind und damit* $(0, 0)$ *nicht attraktiv sein kann).*
  - *Für* $r(x)x > 0$ *für* $x \neq 0$ *(lokal bei* 0 *reicht) gilt die strikte Ungleichung* $\nabla H(x_1, x_2) \cdot f(x_1, x_2) < 0$ *für* $x_2 \neq 0$*. Zwar gilt hier nicht in einer ganzen Umgebung vom Ursprung die strikte Ungleichung, jedoch kann man mit einem etwas allgemeineren Kriterium, dem Invarianzprinzip von LaSalle, sogar* asymptotische Stabilität *zeigen. Zu beachten ist hier, dass* $r(x)x > 0$ *eine allgemeinere Bedingung als* $r'(0) > 0$ *ist (mit Ljapunov und LaSalle kann etwa auch* $r(x) = cx^3$ *behandelt werden).*

Literaturverzeichnis

[1] B. Aulbach, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, second ed., Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2004.

[2] M. Braun, *Differential equations and their applications*, forth ed., Texts in Applied Mathematics, vol. **11**, Springer-Verlag, New York, 1993, An introduction to applied mathematics.

[3] F. Colonius, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vorlesungsskript Wintersemester 2012/13, Universität Augsburg, 2013.

[4] F. Duzaar, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vorlesungsskript Sommersemester 2007, Universität Erlangen, 2007.

[5] T. Schmidt, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vorlesungsskript Wintersemester 2015/16, Universität Erlangen, 2016.

[6] W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, seventh ed., Springer-Verlag, 2000.

Index

Abhängigkeit der Lösung von den Daten, 67, 69
Aneinandersetzen von Lösungen, 8
Anfangswertproblem, 11
Anwendungsbeispiele
    Epidemiologie-Modell, 16
    Fluchtgeschwindigkeit, 14
    freier Fall, 13
    mathematisches Pendel, 14, 100, 126
    Räuber-Beute-Modell, 15, 102
    Reaktionskinetik, 17
    Wachstum von Populationen, 15
Asymptotische Stabilität, 111
autonomes System
    Charakterisierung von Grenzmengen, 96
    Definition, 9
    erstes Integral, 101
    Flusseigenschaften, 92
    Hamilton-Funktion, 100
    Hamiltonsches System, 100
    Klassifikation der Orbits, 94
    konstante Lösungen, 9
    linearisierte asymptotische Stabilität, 120
    Partition des Definitionsbereichs durch Orbits, 95
    Randverhalten, 92
    Translationsinvarianz, 9

Banachscher Fixpunktsatz, 55
Bernoullische Gleichungen, 37, 42

charakteristische Funktion, 68

Differentialgleichung
    Anfangsbedingung, 11
    autonom, 9
    Dimension, 5
    exakt, 32
    explizit, 7
    implizit, 5
    linear, 10
    Ordnung, 5
    Strukturfunktion, 5

Einzugsbereich, 111
Eulersche Gleichung, 41
Eulersches Polygonzugverfahren, 45
exakte Gleichung
    Definition, 32
    implizite Beschreibung der Lösungen, 32
    integrierender Faktor, 35
    Kriterium für Exaktheit, 33
    Lösungsstrategie, 36
    Stammfunktion, 32

Flusseigenschaften, 68, 92

Grenzmenge
    Definition, 92
    mittels Ljapunovfunktion, 122
Grenzpunkt, 92

Instabilität, 111
Integralgleichung, 12
Isokline, 18

Lösung
    allgemeine Lösung, 6
    Definition, 6
Lebensdauerfunktion, 68
Lemma von Gronwall, 63
lineares System
    Übergangsmatrix, 76
    algebraische Feinstruktur des Lösungsraums (homogen, konstante Koeffizienten), 86
    algebraische Struktur des Lösungsraums, 71
    charakteristisches Polynom, 10
    Definition, 10
    einheitliches Stabilitätsverhalten, 115
    Fundamentalmatrix, 73
    Fundamentalsystem, 73
    Lösungsformel (skalar mit konstanten Koeffizienten), 29
    Lösungsformel (skalar, erster Ordnung), 26
    lineare Unabhängigkeit von Lösungen, 73
    partikuläre Lösung, 72
    Stabilitätskriterien mittels Übergangsmatrix, 116
    Stabilitätskriterien mittels Eigenwerten, 117

Superpositionsprinzip, 10
Wronski-Determinante, 73
Wronski-Matrix, 73
Lipschitz-Stetigkeit, 55
Ljapunovfunktion
ω-Grenzmengen, 122
Definition, 121
direkte Methode (Stabilität), 123
Subniveaumengen, 122

Matrix-Exponentialfunktion
allgemeine Rechengesetze, 80
Berechnungsverfahren, 84
Definition, 80
für reelle 2×2 Jordan-Normalformen, 85
spezielle Rechengesetze, 82
Maximal- und Minimallösung, 64
Maximale Lösung, 59
Maximales Existenzintervall, 59

Orbit
Definition, 19, 92
für ebene autonome Gleichungen, 97
implizite Beschreibung über Hamiltonsche Funktion, 100
Klassifikation für autonome Gleichungen, 94

periodischer Punkt mit Minimalperiode, 95
Phasenraum, 19
Picard-Iteration, 46
Potenzreihenansatz, 38

Randverhalten der maximalen Lösung, 60
Reduktion der Ordnung, 10
Reduktionsverfahren von d'Alembert, 30
Riccati-Gleichung, 39, 43
Richtungsfeld, 18
Ruhelage, 92

Satz von
Arzelà–Ascoli, 49
Peano
qualitative Version, 54
quantitative Version, 51
Picard–Lindelöf
qualitative Version, 58
quantitative Version, 56
Separation der Variablen
Lösungsformel, 21
Lösungsstrategie, 23
Stabilität, 111
Steigungsfeld, 18
Sub- und Superlösung, 65

Trajektorie, 19

Variablentransformation, 40
Variation der Konstanten, 27