## H25-T1-A2

Für $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ betrachte den Ring $R_b := \left\{ \frac{a}{b^k} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ und } k \in \mathbb{N}_0 \right\} \subseteq \mathbb{Q}$.

a) Zeigen Sie, dass $R_b$ ein Teilring von $\mathbb{Q}$ und damit ein kommutativer Ring mit Eins ist.

b) Zeigen Sie, dass für die Einheitengruppe gilt:

$$(R_b)^\times = \left\{ \frac{a}{b^k} \in R_b \mid a \in \mathbb{Z} \text{ und es existieren } c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ und } l \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } ac = b^l \right\}.$$

c) Zeigen Sie, dass $R_b$ ein Hauptidealbereich ist und jedes Ideal $\mathfrak{a} \lhd R_b$ die Form $\mathfrak{a} = R_b \cdot w$ für ein $w \in \mathbb{Z}$ hat.
*Hinweis:* Offenbar gilt $\mathbb{Z} \subset R_b$. Betrachten Sie für ein Ideal $\mathfrak{a} \lhd R_b$ den Durchschnitt mit $\mathbb{Z}$.

**Lösung** Ganz allgemein: Das ist die Lokalisation (Verallgemeinerung des Quoutientenkörpers) des Ringes $\mathbb{Z}$ nach dem Element $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Könnt ihr gerne mal googeln.

a) Wir nutzen also die Rechenoperationen von $\mathbb{Q}$:
   - $0 = \frac{0}{b} \in R_b$ (neutrales Element der Addition);
   - $1 = \frac{b}{b} \in R_b$ (neutrales Element der Multiplikation);
   - $\frac{a}{b^k} \cdot \frac{c}{b^l} = \frac{ac}{b^{k+l}} \in R_b$;
   - $\frac{a}{b^k} + \frac{c}{b^l} = \frac{ab^l + cb^k}{b^{k+l}} \in R_b$;
   - $\frac{a}{b^k} \in R_b$, und $\frac{-a}{b^k} \in R_b$, $\frac{-a}{b^k} = -\frac{a}{b^k}$ (inverses Element der Addition;
   - Assoziativität von + und $\cdot$ wird vererbt von $\mathbb{Q}$;
   - Kommutativität von + und $\cdot$ wird vererbt von $\mathbb{Q}$.

b) Wir definieren $E := \left\{ \frac{a}{b^k} \in R_b \mid a \in \mathbb{Z} \text{ und es existieren } c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ und } l \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } ac = b^l \right\}$. Sei nun $\frac{a}{b^k} \in E$. Wir schreiben $\frac{b^k}{a} = \frac{b^k c}{ac} = \frac{b^k c}{b^l} \in R_b$. Offensichtlich gilt also $R_b \ni \frac{b^k}{a} = \frac{a}{b^k}^{-1}$ und demnach ist $\frac{a}{b^k} \in (R)^\times$. Sei umgekehrt $\frac{a}{b^k} \in (R)^\times$. Demnach gibt es $\frac{c}{b^l} \in R_b$ mit $\frac{a}{b^k}\frac{c}{b^l} = \frac{ac}{b^{k+l}} = 1$. Das heißt $ac = b^{k+l}$ wonach $\frac{a}{b^k} \in E$ gezeigt wäre.

c) Für $\mathfrak{a} = (0)$ ist die Aussage tivial. Sei also $\mathfrak{a} \neq (0)$ ein Ideal in $R_b$. Nach dem Hinweis betrachten wir $\mathfrak{a} \cap \mathbb{Z} := \widehat{\mathfrak{a}}$. Offensichtlich ist $\widehat{\mathfrak{a}}$ ein Ideal in $\mathbb{Z}$ und da $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealbereich ist, gibt es ein $w \in \mathbb{Z}$ sodass $\widehat{\mathfrak{a}} = (w)$. Wir behaupten $\mathfrak{a} = R_b \cdot w$. Sei also $\frac{a}{b^k} \in \mathfrak{a}$ beliebig. Demnach ist $\frac{a}{b^k} \cdot b^k = a \in \mathfrak{a}$ und da $a \in \mathbb{Z}$ gilt $a \in \widehat{\mathfrak{a}}$. Somit also $a = cw$ und damit $\frac{a}{b^k} = \frac{c}{b^k} \cdot w \in R_b \cdot w$. Das $R_b \cdot w \subset \mathfrak{a}$ gilt, ist klar, da $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $R_b$ ist und $w \in \mathfrak{a}$ gilt.