H24-T3-A4

Sei $f(X) = X^3 + X^2 - 2X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ und sei $a \in \mathbb{C}$ eine beliebige Nullstelle von f.

a) Zeigen Sie durch Polynomdivision, dass $f(X^2 - 2)$ durch $f(X)$ teilbar ist.

b) Zeigen Sie, dass a und $a^2 - 2$ verschiedene Nullstellen von f sind.

c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist, deren Galoisgruppe zu $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ isomorph ist.

Lösung

a) Man berechnet $f(X^2 - 2) = X^6 - 5X^4 + 6X^2 - 1$ und demnach gilt nach Polynomdivision $f(X^2 - 2) = f(X)g(X) = f(X) \cdot (X^3 - X^2 - 2X + 1)$.

b) a ist nach Angabe eine Nullstelle von f demnach gilt $f(a^2-2) = f(a)g(a) = 0$. Also ist a^2-2 auch eine Nullstell von f. Angenommen $a = a^2-2$, dann wäre a auch eine Nullstell von X^2-X-2 und demnach nach der Lösungsformel für quadratische Gleichung 2 oder -1. Da aber $f(2) = 7 \neq 0$ und $f(-1) = 1 \neq 0$ kann dieser Fall nicht eintreten.

c) Da wenn a eine Nullstelle ist, auch $a^2 - 2$ eine Nullstelle von f ist, ist auch $(a^2 - 2)^2 - 2$ eine Nullstelle von f. Demnach ist der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ der Körper $\mathbb{Q}(a)$. Die Erweiterung $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$ ist demnach normal. Sie ist separabel, da $\text{char}(\mathbb{Q}) = 0$. Also ist sie eine Galoiserweiterung. Wir zeigen noch, dass f irreduzibel ist. Würde f zerfallen so müsste f eine Nullstelle in $\mathbb{Q}$ haben, da der freie Term von f aber -1 ist kommt hierfür nur ± 1 in Frage. Da aber $f(1) = -1 \neq 0$ und $f(-1) = 1 \neq 0$ gilt, hat f keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$ und ist damit in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel, normiert und hat a als Nullstelle. f ist also das Minimalpolynom von a über $\mathbb{Q}$. Demnach ist $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = \deg(f) = 3$. Also hat die Galoisgruppe 3 Elemente und ist deshalb zyklisch und damit isomorph zu $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.