H23-T1-A3

a) Seien G eine einfache Gruppe mit $|G| > 2$, die auf einer endlichen Menge X operiere, und $\rho : G \to \Sigma(X) \simeq S_n$ ($n := |X|$) der zugehörige Gruoppenhomomorphismus in die symmetrische Gruppe von X. Zeigen Sie, dass $\rho(G)$ in der alternierenden Gruppe A_n enthalten ist.

b) Seien G eine nicht-abelsche einfache Gruppe, $H \subseteq G$ eine Untergruppe sowie $n := (G : H) \geq 2$. Zeigen Sie, dass G isomorph zu einer Untergruppe von A_n ist, und dass $n \geq 5$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass keine endliche einfache Gruppe der Ordnung 80 existiert.

Lösung

a) Zunächst wird bemerkt, dass im Zuge einer möglichst einfachen Notation $\rho(G)$ als Teilmenge von S_n angesehen wird (vgl (*)) (laut Aufgabe eigentlich nur vermöge einer Isomorphie, dies erschwert jedoch nur die Notation).Da G einfach ist und $\ker(\rho) \lhd G$ stets ein Normalteiler, muss $\ker(\rho) \in \{\{1\}, G\}$ gelten.

1.Fall: Sei $\ker(\rho) = G$, dann ist $\rho(G) = \{\mathrm{id}\}$ und somit die Aussage wahr.

2.Fall: Sei $\ker(\rho) = \{1\}$ dann ist folglich ρ injektiv. Aus dem Homomorphiesatz folgt daher $G \cong \rho(G) \overset{(*)}{\subseteq} S_n$. Aus dem Satz von Lagrange folgt nun also $|G| | n!$. Man betrachte nun den Normalteiler $N := (\rho(G) \cap A_n) \lhd \rho(G)$ von $\rho(G)$ ($A_n \lhd S_n$). Widerum folgt aus der Einfachheit von G zunächst, dass $\rho(G)$ einfach ist und schließlich, dass $N \in \{\{1\}, G\}$ gelten muss. Wäre $N = \rho(G)$, so wäre $\rho(G) \subseteq A_n$ und damit die Aussage gezeigt. Ist wiederum $N = \{1\}$ so beachte, dass zugleich $N = \ker(\mathrm{sgn}_{|G})$ gilt und daher $\mathrm{sgn}_{|G} = \{1\}$ injektiv ist. Man kann daher G als Untergruppe von $\{\pm 1\}$ lesen und nach Lagrange gilt demnach $|G| | 2$ - ein Widerspruch zu $|G| > 2$.

b) Seien also G und H wie oben. Man betrachte zunächst die folgende Operation (Überprüfen!):

$$G \times G/H \to G/H, \quad (g, [k]) \mapsto g \cdot [k] := [gk].$$

Aus der Angabe, dass G nicht ablesch ist folgt $|G| > 5$ (denn wir kennen alle Gruppen mit Ordnung ≤ 5 und diese sind alle abelsch). Wir betrachten den zugehörigen Gruppenhomomorphismus zur obigen Operation

$$\rho : G \to \Sigma(G/H) \simeq S_n, \quad g \mapsto (\rho_g : G/H \to G/H, \quad [k] \mapsto [gk]).$$

Man berechnet nun den Kern von ρ. Sei also $\rho_g([k]) = [k]\ \forall [k] \in G/H$, dann gilt $[gk] = [g][k] = [k]\ \forall [k] \in G/H$ also $[g] = [1]$ weshalb $\ker(\rho) = \{1\}$ und daher ρ injektiv ist. Wiederum folgt mit dem Homomorphiesatz, dass $G \cong \rho(G)$ und daher nach a), dass $G \cong U$ wobei $U \subseteq A_n$ Untergruppe ist (da U Gruppe und zugleich Teilmenge von A_n ist). Nach Lagrange folgt also $|G| \| \frac{n!}{2}$. Wir behaupten nun $n \geq 5$. Zunächst nehmen wir an, dass $2 \leq n < 4$ gilt, dann ist $\frac{n!}{2} \in \{1, 3\}$. Aus $|G| > 5$ und $|G| \| \frac{n!}{2}$ ergibt sich ein Widerspruch. Man betrachte noch den Fall $n = 4$. Hieraus folgt, dass $4 \| |G|$ und aus $|G| > 5$, dass $|G| \in 4\mathbb{N} - \{4\} = \{8, 12, 16, ...\}$ gilt. Da $|G|$ zudem $\frac{n!}{2} = 12$ teilen muss, muss $|G| = 12$ erfüllt sein. Nach der obigen Aussage ist G dann aber isomorph zu A_4, da $|A_4| = 12$ und $G \simeq U \subseteq A_4$. A_4 ist bekanntlich nicht einfach - ein Widerspruch.

c) Man bezeichne mit X die Menge der 2-Sylowgruppen und $n = |X|$. Nach den Sylowsaätzen folgt für eine Gruppe G mit $80 = 2^4 \cdot 5$ Elementen, dass es genau 1 oder 5 2-Sylowgruppen gibt (Überprüfen! 3. Sylowsatz). Im Fall $n = 1$ ist diese einzige 2-Sylowgruppe ein nicht-trivialer Normalteiler und daher G nicht einfach. Für den Fall $n = 5$ betrachte die folgende Gruppenoperation (Überprüfen!)

$$G \times X \to X, \quad (g, P) \mapsto gPg^{-1}$$

und den dazugehörigen Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \mapsto \Sigma(X) \simeq S_5, \quad g \mapsto (\rho_g : X \to X, P \mapsto gPg^{-1}).$$

Angenommen G ist einfach, dann folgt $\ker(\rho) \in \{\{1\}, G\}$.

1.Fall: Sei $\ker(\rho) = \{1\}$, dann ist ρ injektiv und daher $G \cong \rho(G)$ und deshalb $|G| = |\rho(G)| = 80$. Nach Lagrange gilt also $80 | 120 = 5!$ ein Widerspruch.

2.Fall: Sei $\ker(\rho) = G$. Dann gilt für alle $g \in G$, dass ρ_g die Identität ist. Dies ist unter der Annahme $n = 16$ aber nicht wahr, aufgrund des 2. Sylowsatzes.