F24-T3-A1

a) Es sei $\mathbb{F}_3$ der endliche Körper mit drei Elementen. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente des Kerns U der linearen Abbildung $\phi : \mathbb{F}_3^3 \to \mathbb{F}_3^3$, $\phi(v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} v$.

b) Bestimmen Sie eine Zerlegung des Polynoms $f = 2X^3 + 4X^2 - 2X \in \mathbb{Z}[X]$ in über $\mathbb{Z}$ irreduzible Faktoren.

c) Bestimmen Sie ein $f \in \mathbb{R}[x]$ mit $(f) = (X^2 - 1, X^3 - 1)$ und begründen Sie, warum ihre Wahl diese Gleichheit erfüllt.

d) Zeigen Sie, dass das Element $2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ irreduzibel ist.

Lösung

a) Wir sehen zunächst, dass die Matrix durch Äquivalenzumformungen in folgende Form gebracht werden kann:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{I-2II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir sehen also das die Matrix Rang 1 hat, somit ist nach Rangformel der Kern 2-dimensional und demnach gibt es $9 = 3^2$ Elemente in U.

b) Man faktorisiert f mit dem Wissen, dass 2 irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$ ist wie folgt:

$$f = 2X(X^2 + 2X - 1).$$

Hierbei ist $g = X^2 + 2X - 1$ irreduzibel über $Z[X]$ denn die einzigen Nullstellen die über $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}$ infrage kommen wären ± 1 es gilt jedoch $g(\pm 1) \neq 0$ und demnach, da $\deg(g) = 2$ ist g irreduzibel über $\mathbb{Z}$ (+Lemma von Gauss). Das X irreduzibel ist, ist aus Gradgründen klar und die Irreduzibilität von 2 folgt ebenfalls aus Gradgründen und der Tatscahe, dass 2 keine Einheit in $\mathbb{Z}$ und somit auch keine Einheit in $\mathbb{Z}[X]$ ist.

c) $\mathbb{R}[X]$ ist ein euklidischer Ring deshalb existiert $\mathrm{ggT}(X^2-1, X^3-1)$. Man berechnet mit Hilfe des euklidischen Algorithmus, dass $\mathrm{ggT}(X^2-1, X^3-1) = (X-1)$. Wir behaupten daher $f = (X-1)$. Wir zeigen nun, dass (X^2-1) und (X^3-1) im Ideal $(X-1)$ liegen. Es gilt $X^2-1 = (X-1)(X+1) \in (X-1)$. Weiter gilt $X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1) \in (X-1)$. Es gilt

$$X^3 - 1 = X(X^2 - 1) - X + 1, \quad X^2 - 1 = -X(-X + 1) + X - 1.$$

Folglich bekommt man

$$X - 1 = X^2 - 1 + X(-X + 1) = X^2 - 1 + X(X^3 - 1 - X(X^2 - 1)) = -X^2(X^2 - 1) + X(X^3 - 1).$$

Also ist $X - 1 \in (X^2 - 1, X^3 - 1)$.

d) Wir betrachten die Norm in $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$

$$N : \mathbb{Z}[\sqrt{-13}] \to \mathbb{N}, \quad (a + b\sqrt{-13}) \mapsto a^2 + 13b^2.$$

Diese ist multiplikativ und es gilt $x \in (\mathbb{Z}[\sqrt{-13}])^\times \Leftrightarrow N(x) = 1$. (Edit: Ich nehme an das darf hier als Grundwissen verwendet werden, sicher bin ich mir nicht, schaut im Skript nach wie man das zeigen kann!). Es gilt $N(2) = 4 = 2 \cdot 2$. Zeigen wir also, dass es in $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ kein Element der Norm 2 geben kann, so ist 2 irreduzibel in diesem Ring. Betrachten wir also ein allgemeines Element $a + b\sqrt{-13}$, dessen Norm ist $a^2 + 13b^2$. Nehmen wir an es gilt $a^2 + 13b^2 = 2$ so muss $b = 0$ gelten. Dann folgt aber $a^2 = 2 \in \mathbb{Z}$ - ein Widerspruch. Also ist 2 irreduzibel.