F25-T1-A5

Betrachten Sie das Polynom $f(X) = X^{15} - 7 \in \mathbb{Q}[X]$.

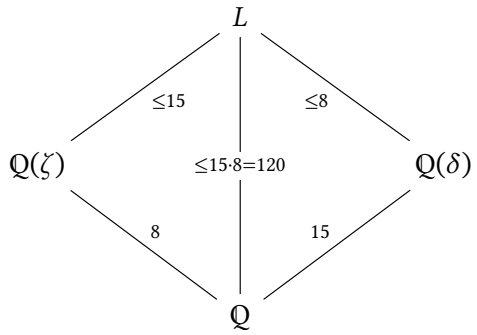
a) Sei $L|\mathbb{Q}$ ein Zerfällungskörper von f. Bestimmen Sie den Körpergrad von $[L : \mathbb{Q}]$.

b) Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ einen Normalteiler der Ordnung 15 besitzt.

c) Sei $\alpha \in L$ eine Nullstelle von f. Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}(\alpha^5)$ den Körpergrad $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\alpha^5)] = 5$ besitzt.

Lösung

a) Wir betrachten die Nullstellen von f. Zunächst sei $\delta = \sqrt[15]{7} \in \mathbb{R}$, die 15-te reelle Wurzel von 7. Dann betrachte $\zeta := \exp\left(\frac{2\pi i}{15}\right)$. Die (paarweise verschiedenen) Nullstellen von f sind also $\delta, \delta\zeta, \delta\zeta^2, \ldots, \delta\zeta^{14}$. Das Minimalpolynom von δ über $\mathbb{Q}$ ist f, weil f irreduzibel nach Eisenstein $p = 7$ ist, zudem normiert und δ als Nullstelle hat. Das Minimalpolynom von ζ ist Φ_{15}, welches den Grad $\phi(15) = \phi(3)\phi(5) = 2 \cdot 4 = 8$ hat. Wir bemerken, dass $L = \mathbb{Q}(\delta, \zeta)$ (nachrechnen!), und betrachten nun den folgenden Körperturm:



Da $\mathrm{ggT}(15, 8) = 1$ erhält man mit dem bekannten Trick, dass $[L : \mathbb{Q}] = 120$ gilt.

b) Da $\mathbb{Q}(\zeta)$ ein Zwischenkörper der galoischen (wieso?) Erweiterung $L|\mathbb{Q}$ ist, ist nach dem Hauptsatz der Galoistheorie $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}(\zeta))$ eine Untergruppe von $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ der Ordnung $[L : \mathbb{Q}(\zeta)] = 15$. Da zudem $\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q}$ eine normale Erweiterung ist, ist $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}(\zeta))$ ein Normalteiler von $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ (Zusatz zum Hauptsatz der Galoistheorie).

c) Offenbar ist α^5 eine Nullstelle von $g(X) = X^3 - 7$. Zudem ist g das Minimalpolynom von α^5, denn es ist normiert und irreduzibel (Eisenstein p=7) und hat α^5 als Nullstelle. Demnach ist $[\mathbb{Q}(\alpha^5) : \mathbb{Q}] = 3$. Da f das Minimalpolynom jeder Nullstelle von f ist, und $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha^5) \subset \mathbb{Q}(\alpha)$ gilt, erhält man mit der Gradformel, dass $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\alpha^5)] = \frac{[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\alpha^5):\mathbb{Q}]} = \frac{15}{3} = 5$.