F23-T1-A3

a) Zeigen Sie, dass jeder irreduzible Faktor von $f := X^4 - 25 \in \mathbb{Q}[X]$ separabel über $\mathbb{Q}$ ist.

b) Bestimmen Sie ein primitives Element eines Zerfällungskörpers L von f über $\mathbb{Q}$ und die Dimension von L über $\mathbb{Q}$.

c) Berechnen Sie die Automorphismengruppe von L über $\mathbb{Q}$.

d) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq L$ und ihre Inklusionen.

Lösungsvorschlag. Zu a). Die irreduziblen Faktoren von f sind nach Eisenstein $X^2 - 5$ und $X^2 + 5$. Diese sind separabel, da sie die verschiedenen Nullstellen $\sqrt{5}$ und $-\sqrt{5}$, bzw. $i\sqrt{5}$ und $-i\sqrt{5}$ haben.[1]
Zu b). Es ist $L = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, -\sqrt{5}, i\sqrt{5}, -i\sqrt{5}) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{5})$ ein Zerfällungskörper. Wir wollen zeigen, dass $x := i + \sqrt{5}$ ein primitives Element ist. Offensichtlich gilt $\mathbb{Q}(x) \subseteq L$. Für die umgekehrte Inklusion berechnen wir:

$$\begin{aligned} x^2 &= 2i\sqrt{5} + 4 \\ x^3 &= 14i + 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Man sieht

$$i = \frac{x^3 - 2x}{12} \in \mathbb{Q}(x)$$

und weiter $\sqrt{5} = x - i \in \mathbb{Q}(x)$. Somit gilt $L = \mathbb{Q}(x)$ und x ist tatsächlich ein primitives Element von L über $\mathbb{Q}$.
Zu c). Um die Automorphismen anzugeben, genügt es, die Bilder von $\sqrt{5}$ und i anzugeben. Die Nullstellen des Minimalpolynoms $X^2 - 5$ von $\sqrt{5}$ über $\mathbb{Q}$ sind $\sqrt{5}$ und $-\sqrt{5}$, sodass genau diese beiden Nullstellen die möglichen Bilder von $\sqrt{5}$ eines Körperhomomorphismus $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ sind. Diese Morphismen kann man fortsetzen; erneut durch Bilder von i, die gegeben sind durch die Nullstellen i und $-i$ des Minimalpolynoms $X^2 + 1$ von i über $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Da $L|\mathbb{Q}$ normal ist, erhalten wir insgesamt die vier Galoisautomorphismen:

- σ_1 definiert durch $\sqrt{5} \mapsto \sqrt{5}, i \mapsto i$,
- σ_2 definiert durch $\sqrt{5} \mapsto \sqrt{5}, i \mapsto -i$,
- σ_3 definiert durch $\sqrt{5} \mapsto -\sqrt{5}, i \mapsto i$,
- σ_4 definiert durch $\sqrt{5} \mapsto -\sqrt{5}, i \mapsto -i$.

Es ist leicht einzusehen, dass alle Elemente außer der Identität Ordnung 2 haben, daher ist $G := \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
Zu d). Die Zwischenkörper entsprechen nach dem Hauptsatz der Galoistheorie eindeutig

[1] Irreduzible Polynome über $\mathbb{Q}$ sind wegen $\mathrm{char}(\mathbb{Q}) = 0$ immer separabel. Damit ließe sich diese Teilaufgabe für sich betrachtet ebenfalls lösen.

den Untergruppen von G. Die nicht-trivialen Untergruppen sind $U_2 = \langle \sigma_2 \rangle$, $U_3 = \langle \sigma_3 \rangle$ und $U_4 = \langle \sigma_4 \rangle$ und durch Testen der einzelnen Elemente von G erkennt man diese leicht wieder als

- $U_2 = \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}(\sqrt{5}))$
- $U_3 = \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}(i))$
- $U_4 = \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}(i\sqrt{5}))$.

Die nicht-trivialen Zwischenkörper sind dann nach dem Hauptsatz der Galoistheorie $L^{U_2} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $L^{U_3} = \mathbb{Q}(i)$ und $L^{U_4} = \mathbb{Q}(i\sqrt{5})$. Die Inklusionen (von unten nach oben) ergeben sich ebenfalls aus der inklusionsumkehrenden Bijektion und stellen sich wie folgt dar:

