H23-T2-A3

a) Seien G_1 und G_2 endliche Gruppen und $|G_1|$ teilerfremd zu $|G_2|$. Sei weiter $H \subseteq G_1 \times G_2$ eine Untergruppe. Zeigen Sie, dass es Untergruppen $H_1 \subseteq G_1$ und $H_2 \subseteq G_2$ gibt mit $H = H_1 \times H_2$.

b) Geben Sie zwei Gruppen G_1 und G_2 an sowie eine Untergruppe $H \subseteq G_1 \times G_2$, sodass H nicht von der Form $H_1 \times H_2$ für zwei Untergruppen $H_1 \subseteq G_1$ und $H_2 \subseteq G_2$ ist.

c) Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n mit folgenden Eigenschaften:

   i) Für jeden Teiler $k > 0$ von n gibt es eine Untergruppe U von G der Ordnung k.

   ii) G ist nicht abelsch.

   Zeigen Sie, dass G nicht einfach ist.

Lösung

a) Da $H \subseteq G_1 \times G_2$ Untegruppe ist H ebenfalls eine endliche Gruppe, wird also von endlich vielen Elementen erzeugt also $H = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$.Da $|G_1|, |G_2|$ teilerfremd sind, gibt es zu jedem x_i eindeutig bestimmte n_i, m_i sodass $n_i || G_1|$ und $m_1 || G_2|$ sowie $\operatorname{ord}(x_i) = n_i m_i$. Insbesondere sind also n_i und m_i teilerfremd. Man erhält

$$\langle x_i \rangle = \langle x_i^{n_i}, x_i^{m_i} \rangle = \langle x_i^{n_i} \rangle \langle x_i^{m_i} \rangle,$$

wobei die erste Gleichheit aus dem Lemma von Bézout folgt. Insbesondere gilt $x_i^{n_i} \in \{1\} \times G_2$ und $x_i^{m_i} \in G_1 \times \{1\}$. Hieraus folgert man, dass $x_i^{n_i}$ und $x_j^{m_j}$ für alle $1 \leq i, j \leq k$ kommutieren. Man erhält daher

$$H = \langle x_1^{n_1}, x_1^{m_1}, \dots, x_k^{n_k}, x_k^{m_k} = \langle x_1^{n_1}, \dots, x_k^{n_k} \rangle \langle x_1^{m_1}, \dots, x_k^{m_k} \rangle,$$

wobei $\langle x_1^{n_1}, \dots, x_k^{n_k} \rangle \subseteq \{1\} \times G_2$ und $\langle x_1^{m_1}, \dots, x_k^{m_k} \rangle \subseteq G_1 \times \{1\}$. Betrachte nun die Gruppenhomomorphismen

$$\mathrm{pr}_i : G_1 \times G_2 \to G_i, \quad (y_1, y_2) \mapsto y_i,$$

für $i \in \{1, 2\}$. Man setze nun $\tilde{x_i} := \mathrm{pr}_1(x_i)$ sowie $\bar{x_i} := \mathrm{pr}_2(x_i)$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$. Hieraus erhält man nun

$$H = \langle \tilde{x_1}^{m_1}, \dots, \tilde{x_k}^{m_k} \rangle \times \langle \bar{x_1}^{n_1}, \dots, \bar{x_k}^{n_k} \rangle$$

.

b) Man betrachte die Untergruppe $H = \{(0,0),(1,1)\} \subseteq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

c) Zunächst zeigen wir das folgende Lemma:
Sei p die kleinste Primzahl, so dass $p|\#G$ gilt und $H \subset G$ eine Untergruppe mit Index $(G : H) = p$. Dann ist H schon ein Normalteiler.
Betrachte die natürliche Operation von G auf G/H (in der Homomorphismus-Form)

$$\rho : G \to S(G/H)\ ,\ g \mapsto ([\sigma] \mapsto [g\sigma])$$

(wobei $S(G/H) := \{f : G/H \to G/H \mid f \text{ bijektiv}\}$ die Gruppe der bijektiven Selbstabbildungen der p-elementigen Menge G/H sei, also $S(G/H) \cong S_p$ nach Nummerieren).

Es gilt $\ker(\rho) \subset H$, denn

$$g \in \ker(\rho) \Rightarrow [g\sigma] = [\sigma] \text{ für alle } [\sigma] \in G/H - \text{insbesondere für } \sigma = 1$$
$$\Rightarrow [g] = [1] \Rightarrow g \in H\ .$$

Nach dem Homomorphiesatz hat man den injektiven Gruppenhomomorphismus

$$G/\ker(\rho) \hookrightarrow S(G/H)$$

und mit Lagrange folgt dann $\#(G/\ker(\rho))|p!$. Also wissen wir

$$\text{i) } \#(G/\ker(\rho))|p! \text{ und ii) } \#(G/\ker(\rho))|\#G$$

Nach Voraussetzung ist aber $\mathrm{ggT}(p!, \#G) = p$ (weil p der kleinste Primteiler von $\#G$ ist), also folgt

$$\text{i) und ii)} \ \Rightarrow \#(G/\ker(\rho)) \mid \mathrm{ggT}(p!, \#G) = p\ .$$

Wegen $\ker(\rho) \subset H \subset G$ und $\#(G/H) = p$, folgt daraus schnell $\ker(\rho) = H$.
Jetzt können wir die eigentliche Aufgabe angehen:

Sei p der kleinste Primteiler von $n = \#G$. Dann gibt es nach Voraussetzung eine Untergruppe U mit $\frac{\#G}{p}$ Elementen, also mit Index $(G : U) = p$. Insbesondere ist $U \subsetneq G$. Nach dem Lemma ist $U \lhd G$ ein Normalteiler. Der Fall $U = \{1\}$ kann nur eintreten, wenn $n = p$ gilt, aber dann wäre G zyklisch (und somit abelsch), im Widerspruch zur Voraussetzung. Also haben wir einen Normalteiler $\{1\} \neq U \subsetneq G$ gefunden.