## H24-T1-A3

Sei $K$ ein Körper und sei

$$R := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X] \middle| a_1 = 0 \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $R$ ein Teilring (mit Eins) des Polynomrings $K[X]$ über $K$ ist.

b) Entscheiden Sie begründet, ob $f = X^3 \in R$ irreduzibel ist und ob $f = X^3 \in R$ prim ist.

c) Entscheiden Sie begründet, ob $R$ ein faktorieller Ring ist.

d) Geben Sie ein $a \in R$ an, sodass das Ideal $(X^3, a)$ von $R$ kein Hauptideal ist, und begründen Sie Ihre Wahl.

**Lösung**

a) $R \subset K[X]$ sowie $0, 1 \in R$ sieht man trivialerweise. Für $f = \sum i = 0^n a_i X^i, g = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j \in R$ gilt für $f + g = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} c_k X^k$, dass $c_1 = a_1 + b_1 = 0 + 0 = 0$ gilt. Für $fg = \sum_{k=0}^{n+m} d_k X^k$ gilt $d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 + 0 = 0$. Demnach ist $R$ unter den beiden Verknüpfungen abgeschlossen und somit $R$ ein Teilring.

b) Da $\deg(X^3) = 3$ zerfällt ist eine nichtriviale Zerlegung von $X^3$ nur in ein Polynom von Grad 1 und eines von Grad 2 möglich. Da es in $R$ jedoch kein Polynom von Grad 1 gibt, da $a_1 = 0$ für alle $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ gelten muss, ist $X^3$ irreduzibel. $X^3$ ist nicht prim, da $X^3 \mid X^6 = X^2 X^4$ aber $X^3 \nmid X^2$ und $X^3 \nmid X^4$. Dass $X^3 \nmid X^2$ gilt ist aus Gradgründen klar. Zeigen wir weiter, dass $X^3 \nmid X^4$ gilt. Angenommen $X^3 \mid X^4$, dann gilt $X^3 \cdot f = X^4$ mit $f \in R$ und aus Gradgründen ist $f$ von Grad 1. Jedoch gibt es in $R$ kein Polynom vom Grad 1.

c) In einem faktoriellen Ring wäre jedes irreduzible Element auch prim. Daher kann $R$ nicht faktoriell sein.

d) Wähle $a = X^2$. Angenommen es gibt ein $f \in R$ mit $(f) = (X^3, X^2)$, so muss $X^3 \in (f)$ gelten. Das bedeuet, dass $f \mid X^3$ gilt, also $\exists g \in R : X^3 = fg$. Nach b) ist $X^3$ irreduzibel, also $f = X^3$ oder $f \in R^\times$. Beide Fälle können wir ausschließen, denn wenn $f = X^3$, dann gibt es kein $h \in R$ sodass $X^2 = X^3 \cdot h$, da $X^3 \nmid X^2$. Im anderen Fall wäre $(f) = R$, aber $(X^2, X^3) \neq R$, denn z.B. $X^2 - 2$ liegt nicht in $(X^2, X^3)$ aber in $R$.