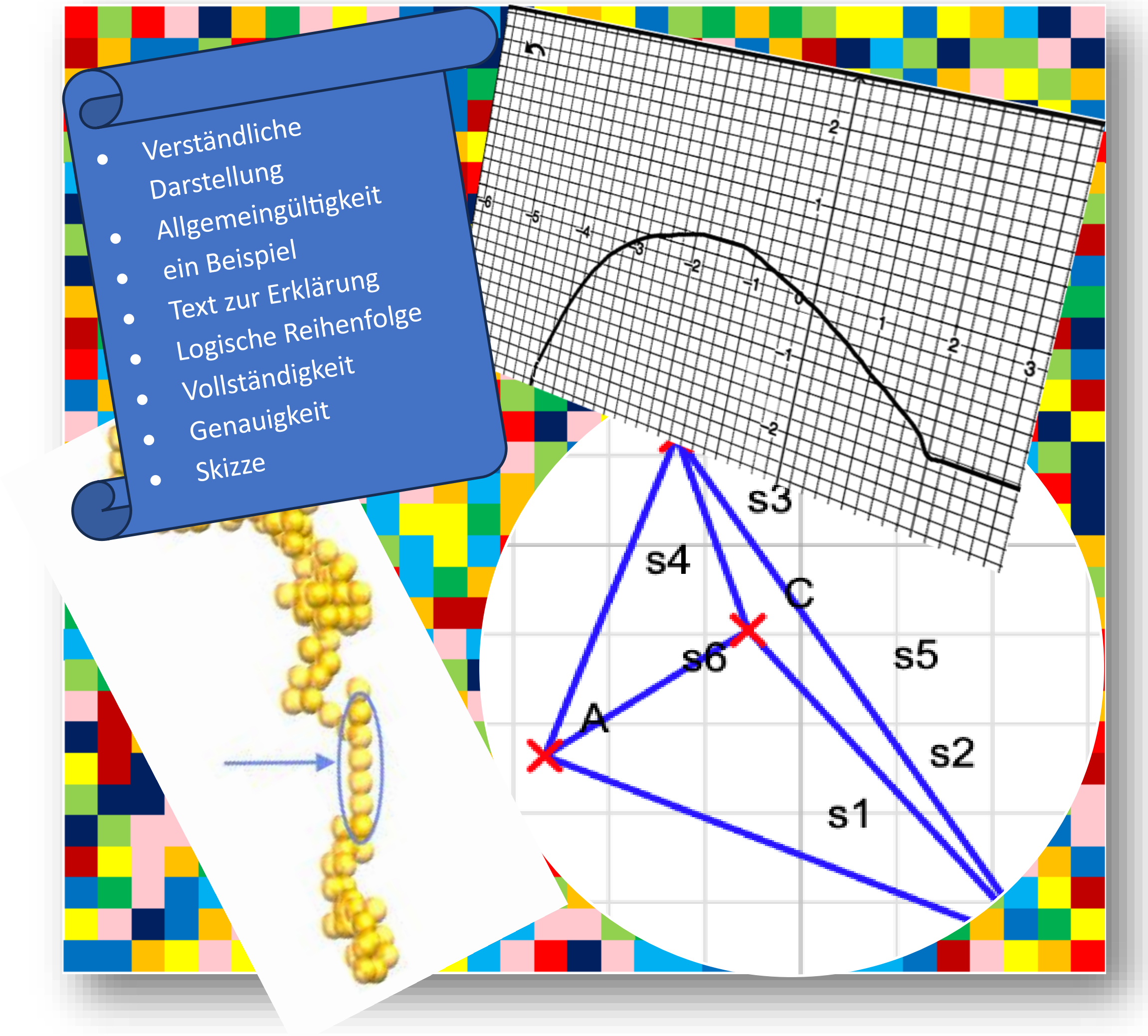
impulse

für guten Mathematikunterricht



Mathematikdidaktische Zeitschrift für Augsburg

Universität Augsburg
Didaktik der Mathematik

2. Ausgabe im Oktober 2023

Inhalt

Editorial

Liebe Leserin, lieber Leser,

Sie halten die zweite Ausgabe der Augsburger Mathematikdidaktikzeitschrift *impulse* in Händen. Ziel dieser Zeitschrift ist es, praktikable Ideen für den Mathematikunterricht zu kommunizieren und dabei einen Austausch von Universität und Schulpraxis zu ermöglichen. Aus diesem Grunde streben wir an, dass jede Ausgabe sowohl Beiträge aus der Schulpraxis wie aus der Universität enthält. Wir freuen uns, dass wir auch dieses Mal Lehrkräfte als Autoren gewinnen konnten! Wenn Sie also auch Ideen, Erfahrungen oder Impulse aus Ihrem Mathematikunterricht haben, die Sie an Kolleg*innen weitergeben möchten, schreiben Sie uns gerne an – wir freuen uns auch über Lob, Kritik, Anregungen, Verbesserungsvorschläge, …

Sabrina Bersch, Andreas Merkel, Renate Motzer, Reinhard Oldenburg, Samuel Pfeifer

(das Redaktionsteam)

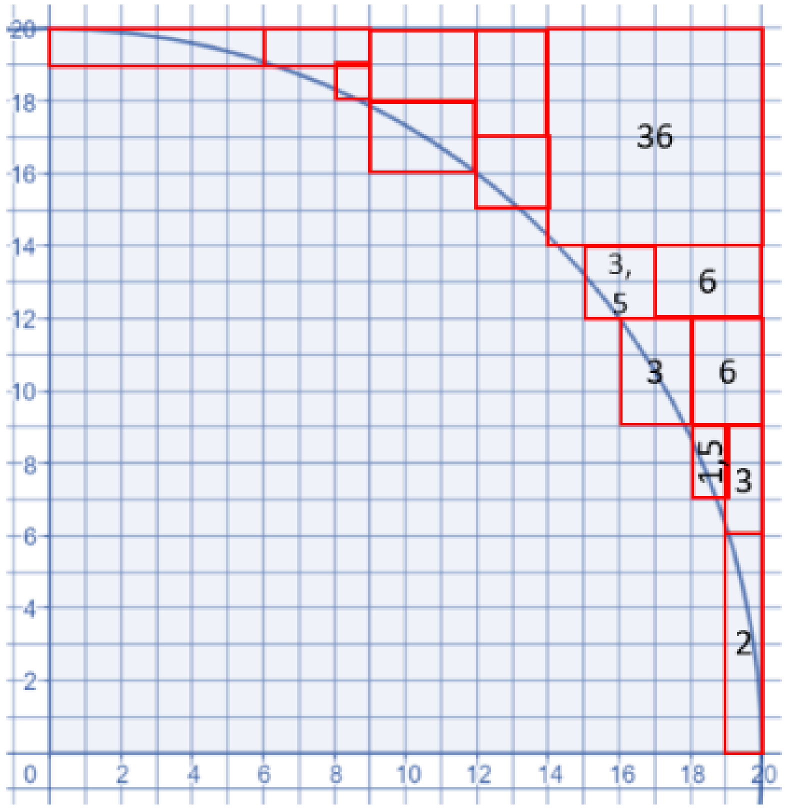
π sehen

Samuel Pfeifer, Universität Augsburg

π zählt zu den faszinierendsten Objekten des Mathematik. Der Artikel will dazu einladen, über Wege nachzudenken, wie man sich im Unterricht dieser irrationalen Naturkonstante annähern könnte.

Für gewöhnlich wird π im Unterricht als Proportionalitätskonstante zwischen Umfang U und Durchmesser d eines Kreises eingeführt und als solche lässt sie sich durch Messung der beiden Größen und Berechnung des Quotientenwertes $U{:}\,d$ annähern.
Alternativ lässt sich eine Abschätzung von π aber auch so bestimmen:
Die Formel für den Flächeninhalt des Kreises wird als bekannt vorausgesetzt. Ein den Kreis einbeschreibendes Quadrat hat dann den Flächeninhalt $(2r)^2$. Dann gilt:

$$\frac{A_K}{A_Q} = \frac{\pi r^2}{4r^2} \Rightarrow \pi = 4 \cdot \frac{A_K}{A_Q}$$



π entspricht also dem vierfachen Wert des Verhältnisses aus Kreisflächeninhalt und Flächeninhalt des einbeschreibenden Quadrates. Durch Auszählen von Kästchen lässt sich A_k bestimmen und so ein Schätzwert für π finden. Hier im Beispiel zählt man für den Viertelkreis $400 - 86 = 314$ Kästchen – der dazugehörige Flächeninhalt des Quadrats beträgt 400 – das ergibt für π einen Wert von 3,14.

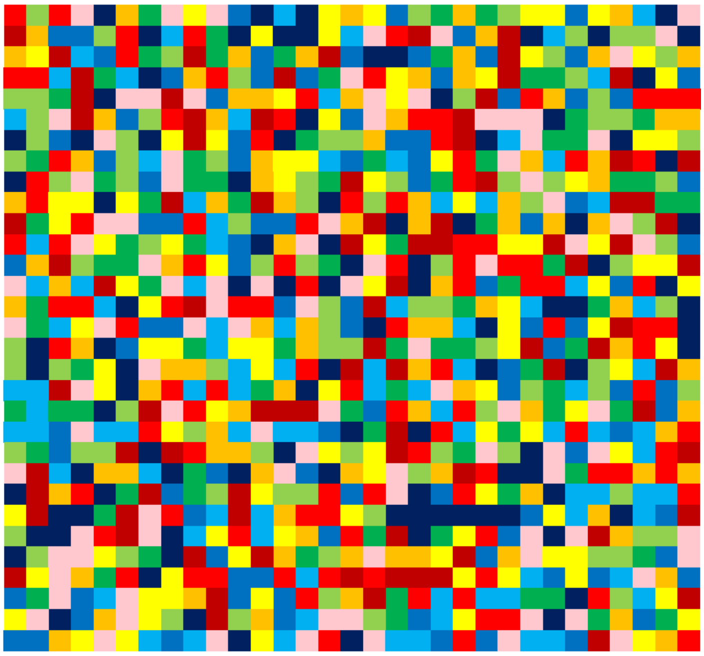
Nimmt man einen Zylinder und eine quadratische Säule gleicher Höhe, deren Grundfläche die Grundfläche des Zylinders einbeschreibt, so gilt für das Verhältnis der Massen der beiden Objekte (bei homogener Dichte und gleichem Material) ebenso[1]:

$$\frac{m_{Zyl.}}{m_{q.S.}} = \frac{\pi}{4}$$

Damit lässt sich durch das Messen der beiden Massen π analog abschätzen. In unserem Beispiel ergibt sich damit:

$$\pi = 4 \cdot \frac{11}{14} \approx 3{,}14$$

Ordnet man jeder Nachkommastelle von π eine Farbe zu, so lässt sich π als Bild darstellen (von links nach rechts und oben nach unten gelesen):



Gut zu erkennen ist der sogenannte *Feynmanpunkt*: Ab der 762. Stelle tritt sechs Mal die Ziffer 9 in Folge auf (hier in Dunkelblau). Angeblich hat Feynman in einer Vorlesung gesagt, er würde gerne die Nachkommastellen bis zur 762. Stelle auswendig lernen, um dann sagen zu können: „Neun, Neun, Neun und immer so weiter“[2].

Im Moment ist davon auszugehen, dass π eine *normale* Zahl ist, das heißt, dass die Nachkommziffern zufällig angeordnet sind bzw. dass Ziffernfolgen gleicher Länge mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Im Internet kann man leicht nachsehen, ab welcher Nachkommastelle eine gewisse Zahlenfolge auftritt.[3] Beispielsweise tritt die Zahlenfolge 12345678 ab der 186557266. Nachkommastelle auf.

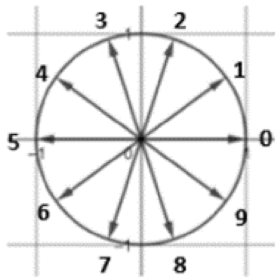
---

[1] $\frac{m_{Zyl.}}{m_{q.S.}} = \frac{\rho \cdot V_{Zyl}}{\rho \cdot V_{q.S.}} = \frac{G_{Zyl} \cdot h_{Zyl}}{G_{q.S} \cdot h_{q.S.}} = \frac{G_{Zyl}}{G_{q.S}} = \frac{r^2 \cdot \pi}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4}$

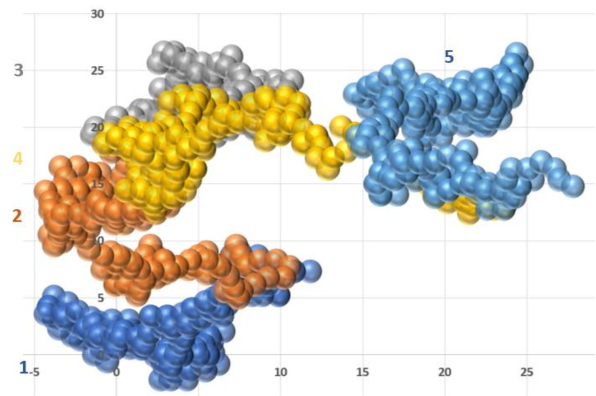
[2] Der Weltrekord liegt im Moment im Übrigen bei 70.030 memorierten Nachkommastellen und wird vom Inder Suresh Kuma Sharma gehalten, er benötigte für das Aufsagen 17 Stunden und 14 Minuten.

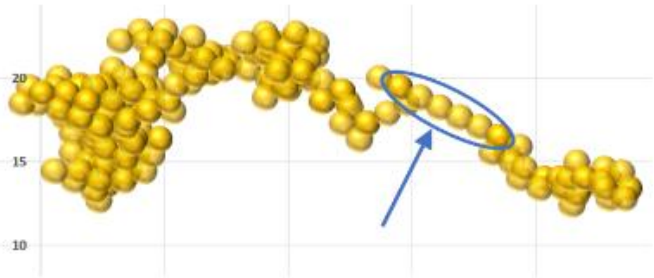
[3] Z. B. auf www.pi-e.de

Weist man den Ziffern 0 bis 9 jeweils eine Richtung zu (Richtungsvektor mit Länge 1), so kann man eine Vektorsumme erzeugen und jede Pfeilspitze durch einen farbigen Punkt darstellen. Nachdem die Abfolge der Vektoren zufällig erfolgt, spricht man von einem „Random-Walk“ von Pi (hier von den ersten 1000 Nachkommastellen): Weil sich die Punktewolken teilweise überlappen, wurden Punkte, die hintereinander liegen in derselben Farbe codiert. Der Feynmanpunkt ist hier verdeckt und befindet sich in der vierten (gelben) Punktewolke.

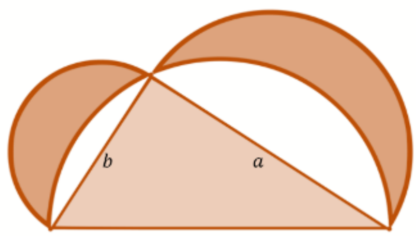


Da nur endlich viele Nachkommastellen betrachtet werden, ist die relative Auftrittshäufigkeit der Ziffern nicht gleich und die Punktewolke „driftet“ nach oben rechts.





In der Schule wird einfach stillschweigend davon ausgegangen, dass π irrational ist. Es gibt durchaus auch gute Argumente dafür, dass π auch rational sein könnte, wie man anhand der *Möndchen des Hippokrates* sieht. Dies folgt aus einer Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras: Seien die Flächen über den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks zueinander ähnlich. Dann ist die Summe der Flächeninhalte über den Katheten gleich dem Inhalt der Fläche über der Hypotenuse. Nimmt man als zueinander ähnliche Flächen Halbkreise, dann lautet der Satz: *Die Summe der Flächeninhalte der Halbkreise über den Katheten entspricht dem Flächeninhalt des Halbkreises über der Hypotenuse* (Gl. 1). Letzterer wurde in der Grafik „nach oben geklappt“ und setzt sich aus dem Flächeninhalt des Dreiecks und den Flächeninhalten der beiden weißen Flächen zusammen. Zieht man von (Gl. 1) auf beiden Seiten die Summe der Flächeninhalte der beiden weißen Flächen ab, so bleibt: *Die Summe der Flächeninhalte der beiden Möndchen entspricht dem Flächeninhalt des Dreiecks*. Wählt man $a = 4$ und $b = 3$, so ergibt sich als Flächeninhalt des Dreiecks 6, eine ziemlich natürliche Zahl, also beträgt auch die Summe der Flächeninhalte der beiden Möndchen 6 – einer nur durch krummlinige Seiten begrenzten Figur! Da liegt die Vermutung auf der Hand, dass der Flächeninhalt von Kreisen rational sein könnte…



Tatsächlich ist der Irrationalitätsbeweis für π nicht ganz trivial. Niven zeigte 1946 jedoch einen Widerspruchsbeweis, der nur mit grundlegender Integral- und Differentialrechnung auskommt, also mit Mitteln der Oberstufe. Er sei darum an dieser Stelle kurz skizziert:
Man nimmt an: $\pi = \frac{a}{b}$, und definiert dann:

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$$

mit:

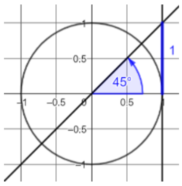
$$f(x) = \frac{x^n \cdot (a - bx)^n}{n!}$$

Der Widerspruch besteht nun darin, dass der Wert des Integrals

$$\int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin{(x)}$$

einerseits zwischen Null und Eins liegt und andererseits ganzzahlig ist (das ist etwas Arbeit) – man verwendet dazu die Stammfunktion $F'(x)\sin(x) - F(x)\cos(x)$ für $f(x) \cdot \sin(x)$.

Es gibt viele Formeln um π beliebig genau anzunähern. Einfach zu verstehen ist die Reihe von Leibniz.
Es gilt:



$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \text{ bzw. } \frac{\pi}{4} = arctan(1)$$

Kennt man nun die Reihendarstellung des Arkustangens, lässt sich Pi bestimmen:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Diese Reihe konvergiert allerdings nur sehr langsam. Etwas schneller ist da die Reihe von Euler. Seine Idee war, die Reihen- und die Produktdarstellung (Nullstellenform) des Sinus gleichzusetzen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \cdot \pi^2}\right)$$

Ausgeschrieben:

$$x - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} x^3 + \cdots = x - \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1^2 \cdot \pi^2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^2 \cdot \pi^2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3^2 \cdot \pi^2}} + \ldots\right) \cdot x^3 + \cdots$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\mathbf{\frac{1}{6} = \frac{1}{1^2 \cdot \pi^2} + \frac{1}{2^2 \cdot \pi^2} + \frac{1}{3^2 \cdot \pi^2} + \cdots}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

Was Konvergenz anbelangt, ist die *Nilakanthareihe* deutlich besser:

$$\pi \approx 3 + \frac{4}{3^3 - 3} - \frac{4}{5^3 - 5} + \frac{4}{7^3 - 7} - \cdots$$

wird aber von der Reihe von Ramanujan übertroffen:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)! \cdot (1103 + 26390k)}{(k!)^4 \cdot 396^{4k}}$$

Die genannten Reihen lassen sich gut mittels eines Tabellenkalkulationsprogrammes realisieren und im Unterricht einbetten. Außerdem lassen sich an dieser Stelle auch interessante Fakten über die Leben von Leibniz, Euler und Ramanujan erzählen!

Für weitere Informationen: samuel.pfeifer@uni-a.de

Beweis-Impuls

Beweise unter die Lupe nehmen

Svenja Grundey, Pestalozzigymnasium München

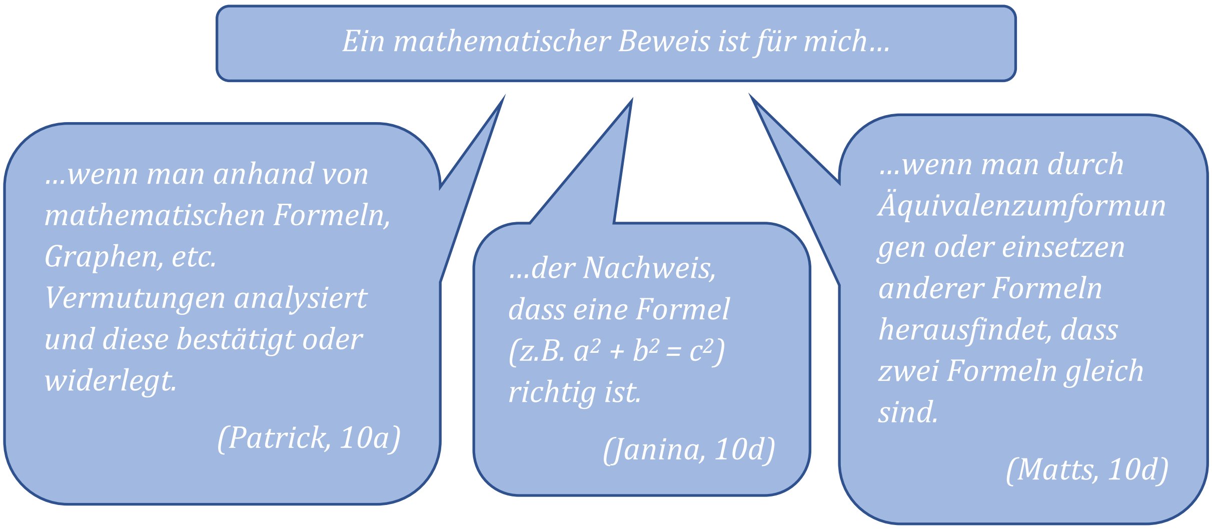
Das mathematische Argumentieren und Beweisen stellen im Bereich Schule eine wichtige prozessbezogene Kompetenz dar, die auf Seiten der Lernenden gefördert werden soll. Neben dem Erläutern mathematischer Zusammenhänge sollen die Lernenden z. B. auch in der Lage sein, verschiedene Argumentationen und Beweise zu bewerten und selbst solche zu entwickeln[4].

In meiner Dissertation[5] zeigt sich im Bereich des mathematischen Beweisens, dass die meisten Lernenden eine sehr formal-algebraisch geprägte Vorstellung von Beweisen

[4] Siehe auch: Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Sekundarstufe I (2022) (KMK)

[5] Für mehr Informationen: Grundey, S. (2015): Beweisvorstellungen und eigenständiges Beweisen. Perspektiven der Mathematikdidaktik. Springer Spektrum, Wiesbaden.

haben. Typische schriftliche Antworten auf die Frage, was für sie ein mathematischer Beweis sei, waren z. B. folgende:



Diese sehr enge Beweisvorstellung wirkte sich im Laufe der Unterrichtseinheit zum Beweisen (im Bereich der Analysis) hinderlich beim eigenständigen Beweisen mathematischer Aussagen aus und lieferte gleichzeitig eine mögliche Erklärung für diese Schwierigkeiten.

Im Folgenden möchte ich eine Idee aus dem Bereich der Analysis vorstellen, wie man Reflexionsprozesse über mathematische Beweise im Mathematikunterricht anregen kann, um diese sehr enge Beweisvorstellung zu erweitern und zu verdeutlichen, dass die äußere Form / Darstellung kein entscheidendes Kriterium für einen Beweis ist.

Dabei werden die Lernenden mit verschiedenen korrekten und auch fehlerhaften prototypischen[6] Beweisen zu der folgenden mathematischen Aussage konfrontiert:

Ist f eine ganzrationale Funktion vom Grad 2, so hat f genau eine Extremstelle.

Die sieben entwickelten Beweise unterscheiden sich dabei in ihrer Art der Darstellung (formal oder narrativ) und es werden typische Fehlvorstellungen wie z.B. empirische Argumentationen (graphisch und rechnerisch) aufgegriffen. Es ist notwendig, dass die Lerngruppe das inhaltliche Wissen bezüglich des Verlaufs ganzrationaler Funktionen und der Kriterien für die Existenz eines Extrempunktes haben, bevor man diese prototypischen Beweise im Unterricht einsetzt. Daher bietet sich der Einsatz des folgenden Materials ab dem Ende der Jahrgangsstufe 11 an.

[6] Die Bezeichnungen der Prototypen beziehen sich auf die äußere Form, die logische Struktur sowie die Allgemeingültigkeit.

<table>
<tr><th>Empirisch - rechnerisch</th><th>Formal - deduktiv</th></tr>
<tr><td>

Claras Begründung: „Ich betrachte die folgenden beiden Funktionen. Durch Rechnung habe ich herausbekommen, dass $f(x) = 2x^2 – 4$ bei $x = 0$ eine Extremstelle hat.

Durch eine zweite Rechnung zeigt sich, dass

$f(x) = – 5x^2 + 2x – 3$ bei $x = 1/5$ eine Extremstelle hat.

Da beide Funktionen genau eine Extremstelle haben und ich diese beliebig ausgewählt habe, **ist die Aussage wahr.“**

</td><td>

Toms Begründung: „Ich wähle den folgenden Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$.

Dann gilt für die 1. und 2. Ableitung: $f'(x) = 2ax + b$ und $f''(x) = 2a$.

Die notwendige Bedingung für eine Extremstelle ist:

$f'(x_e) = 0$, d.h.

$0 = 2ax_e + b \mid -b$

$\Leftrightarrow -b = 2ax_e \mid : (2a)$ (möglich, da $a \neq 0$ ist)

$\Leftrightarrow \frac{-b}{2a} = x_e$ ist einzige mögliche Extremstelle

$f''\left(\frac{-b}{2a}\right) = 2a$ und da $a \neq 0$ ist, gilt: $f''(x_e) \neq 0$.

Damit hat f die einzige Extremstelle bei $x_e = \frac{-b}{2a}$.

Die Aussage ist wahr.

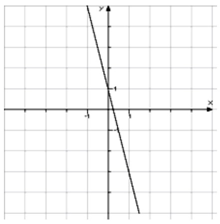
</td></tr>
<tr><th>Narrativ - deduktiv</th><th>Widerlegung durch (falsches) Gegenbeispiel</th></tr>
<tr><td>

Lisas Begründung: „Wenn eine ganzrationale Funktion den Grad 2 hat, dann ist der Grad der Ableitungsfunktion f' genau 1 und f'' ist konstant und ungleich Null. Jede ganzrationale Funktion 1. Grades hat genau eine Nullstelle x_e. Diese Nullstelle ist damit die einzige Extremstelle x_e von f, da f '' konstant und

$f''(x_e)$ ungleich Null ist. Daher ist die Aussage wahr.“

</td><td>

Sarahs Begründung: Ich betrachte die folgende Funktion auf meinem Taschenrechner:

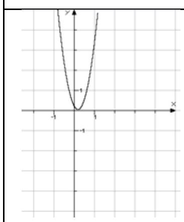
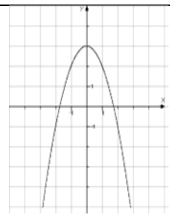
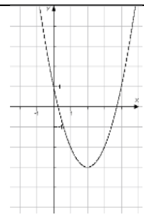


$f(x) = 0x^2 – 4x +1$.

Diese Funktion hat keine Extremstelle und **damit ist die Aussage falsch.**

</td></tr>
<tr><th>Empirisch – graphisch</th><th>Autoritätsbeweis</th></tr>
<tr><td>

Bens Begründung: „Ich stelle die folgenden drei Beispiele auf meinem Taschenrechner dar:

<table>
<tr><th>$f(x) = 5x^2 – 2x + ¼$</th><th>$f(x) = –x^2 + 3$</th><th>$f(x) = x^2 – 4x + 1$</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Alle drei gewählten Funktionen haben genau eine Extremstelle. **Damit ist die Aussage wahr.“**

</td><td>

Ninas Begründung: Alle ganzrationalen Funktionen 2. Grades sind Parabeln und wir haben gelernt, dass jede Parabel genau einen Scheitelpunkt hat. Dieser Scheitelpunkt ist ein Extrempunkt. **Damit ist die Aussage wahr.**

</td></tr>
</table>

Formal deduktiv (fehlerhaft)
Daniels Begründung: Gegeben/ Voraussetzung: $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$), da f eine ganzrationale Funktion vom Grad 2 ist. Aus der Faktorregel $(k \cdot u(x))' = k \cdot u'(x)$ und der Summenregel $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$ folgt: $f'(x) = 2ax + b$ und $f''(x) = 2a$. f hat genau einen Extrempunkt, weil f eine ganzrationale Funktion 2. Grades ist. Für x_e gilt: $f'(x_e) = 0$ und $f''(x_e) \neq 0$, da dies die notwendige und hinreichende Bedingung für Extremstellen ist. x_e ist die einzige Extremstelle, da $f'(x_e) = 0$ und $f''(x_e) \neq 0$. Damit ist die Aussage bewiesen.

Tabelle 1: Übersicht über die prototypischen Beweise

Diese prototypischen Beweise dienen als Grundlage im Unterricht, Reflexionsprozesse auf Seiten der Lernenden in Bezug auf mathematische Beweise anzuregen. So kann mit der Methode Think – Pair – Share eine Reflexion angeregt und anschließend eine Bewertung der verschiedenen vorgestellten Beweise vorgenommen werden, indem zunächst jeder Schüler / jede Schülerin diese nach festgelegten Kriterien bewertet. Dabei ist es wichtig, dass man den Lernenden konkrete Anhaltspunkte beim Arbeitsauftrag gibt, wie z. B. dass sie entscheiden sollen, ob es sich um einen mathematischen Beweis handelt oder nicht und diese Einschätzung begründen sollen. Oder auch, welche Argumente in dem „Beweis“ angeführt werden, ob Ergänzungen vorgenommen werden müssen oder ob Zwischenschritte fehlen. Nach dieser Think – Phase folgt ein Austausch mit dem Sitznachbarn / der Sitznachbarin über die verschiedenen prototypischen Beweise und deren Bewertung (Pair – Phase). Es ist in diesem Fall nicht notwendig, dass sich die Lernenden in dieser Phase auf eine gemeinsame Lösung bei allen prototypischen Beweisen einigen. Zum Abschluss der Methode findet ein Austausch innerhalb der gesamten Lerngruppe statt (Share – Phase), die von der Lehrperson moderiert und auch gelenkt wird. Dabei ist es wichtig, dass die Lehrperson auf bestimmte Aspekte in den prototypischen Beweisen fokussiert, wie z. B. die Problematik einzelner Beispiele, die nicht generischer Natur sind, oder auch auf eine formale Darstellung einer Argumentation, die nicht korrekt ist. Wichtige Fragestellungen könnten in diesem Zusammenhang zum Beispiel die folgenden sein: Wie konstruiert man einen Beweis? Was sind die Kernbestandteile eines Beweises? Wie ist die logische Struktur? Was ist die Funktion von Beweisen? Welches ist die Schlüsselidee in der Argumentation? Warum stellt dieser prototypische Schülerbeweis einen Beweis dar oder nicht?

Gerade in dieser Phase können die Reflexionsprozesse über mathematische Beweise auf Seiten der Lernenden angeregt werden, sodass sie sich ihrer eigenen Beweisvorstellung bewusstwerden und diese im besten Fall durch die Diskussionsphase erweitern.

Als Abschluss dieser Diskussionsphase bietet es sich an, mit der Lerngruppe gemeinsam Kriterien für mathematische Beweise zu entwickeln und diese schriftlich festzuhalten. Dabei sollte darauf geachtet werden, dass die formale Art der Darstellung in den Hintergrund und mehr die logische Struktur der Argumentation in den Vordergrund gerückt wird. Die folgende Abbildung zeigt beispielhaft eine Auflistung genannter Kriterien aus meiner Dissertation:

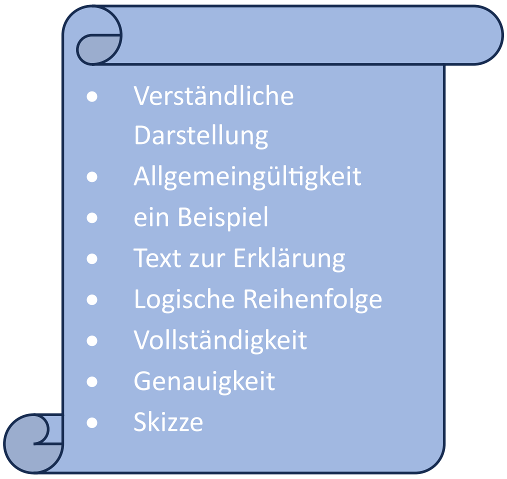


Abbildung 1: Genannte Kriterien in einer Lerngruppe

In dieser Auflistung zeigt sich noch ein weiterer wichtiger Aspekt in Bezug auf das mathematische Beweisen. Neben mathematischen Kriterien wie der Allgemeingültigkeit und der logischen Abfolge der Argumente spielt auch die soziale Dimension von Beweisen an dieser Stelle eine Rolle. Dies zeigt sich in Antworten, die sich auf eine verständliche Darstellung, eine Erklärung in Form eines Texts oder auch ein Beispiel / eine Skizze beziehen. Dabei geht es weniger um fachliche Kriterien, sondern eher darum, welche Aspekte für den Adressaten hilfreich sind, um den Beweis verstehen und nachvollziehen zu können. Als Lehrkraft sollte man sich im Vorfeld überlegen, inwieweit man diese Aspekte, falls sie genannt werden, aufnimmt und thematisiert bzw. diese an der Stelle im Unterricht vernachlässigt.

Das Material bzw. die Arbeitsblätter finden Sie unter dem folgenden Link zum Herunterladen:
https://www.dropbox.com/sh/ufhuevt7syxer9z/AACJiShYaWUza2VVTuhO7TM1a?dl=0

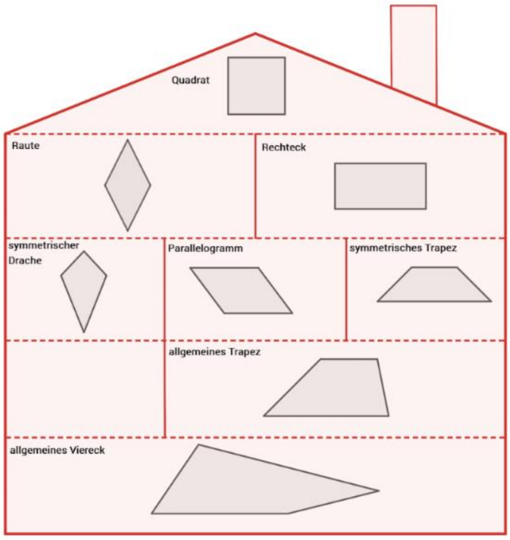
Für weitere Informationen: svenja.grundey@googlemail.com

Klassifikations-Impuls

Zimmer frei für Halbdrachen!

Reinhard Oldenburg, Universität Augsburg

Vierecke lassen sich nach vielen Kriterien klassifizieren: Symmetrieeigenschaften, Rechtwinkligkeit oder Parallelität von Seiten, Längengleichheiten, Winkel und Teilungsverhältnis der Diagonalen. In einigen Darstellungen des Hauses der Vierecke werden die klassifizierenden Merkmale hervorgehoben, in anderen sind diese Merkmale nur implizit erkennbar. Eine typische Darstellung findet sich auf Serlo[7]:



Und da ist doch im ersten Stock noch ein Zimmer frei! Was könnte da rein? Es müsste eine Vierecksklasse sein, die genau eine einschränkende Bedingung erfüllt, genau wie das allgemeine Trapez, das auch nur eine Bedingung erfüllt.

An dieser Stelle ein Exkurs zu den Bedingungen und ihrer Zählweise: Gerade wenn man auch mit dynamischer Geometrie arbeitet, ist der Begriff der Freiheitsgrade naheliegend: Ein beliebiger Punkt in der Ebene wird durch zwei Koordinaten, also durch zwei reelle Zahlen, beschrieben, er hat zwei Freiheitsgrade. Das allgemeine Viereck aus vier beliebigen Punkten hat demnach acht Freiheitsgrade. Das allgemeine Trapez ist durch eine einschränkende reelle Bedingung (Gleichung): nämlich dass der vierte Punkt auf einer zur gegenüberliegenden Seite parallelen Gerade liegt, die durch den dritten Punkt verläuft, es hat also noch sieben Freiheitsgrade. Das Parallelogramm ist durch zwei Bedingungen eingeschränkt, es hat also noch sechs Freiheitsgrade. Die kann man beispielsweise auch so zählen: Um ein Parallelogramm zu zeichnen, wählt man eine Basisstrecke (vier Freiheitsgrade), dann einen Winkel (ein Freiheitsgrad) und die Länge der anliegenden Seite (ein weiter Freiheitsgrad). Insgesamt bleiben also sechs Freiheitsgrade übrig. Rechteck und Raute haben fünf Freiheitsgrade, das Quadrat nur noch vier, weil es nach Wahl eine Basisseite eindeutig bestimmt ist. Auf die Zahl der vier Freiheitsgrade beim Quadrat kann man aber auch anders kommen: man hat einen Freiheitsgrad für die Seitenlänge, außerdem kann man es in der Ebene drehen (ein Freiheitsgrad) und beliebig verschieben (zwei Freiheitsgrade).

In das noch freie Zimmer muss also ein Viereckstyp eingetragen werden, der sieben Freiheitsgrade hat, d.h. man kann gegenüber dem allgemeinen Viereck eine Forderung stellen. Wie könnte diese lauten?

- Während man beim allgemeinen Trapez fordert, dass es ein Paar gegenüberliegender Seiten parallel ist, könnte man nun fordern, dass ein solches Paar orthogonal ist.
- … oder dass ein Paar gegenüberliegender Seiten gleich lang sind.
- … oder dass ein Paar benachbarter Seiten gleich lang ist.

Für diese Viereckstypen kenne ich keine Bezeichnungen, man könnte also kreativ werden, z. B.: allgemeines Orthopez, längenhalbsymmetrisches Viereck, halbgleichseitiges Viereck.

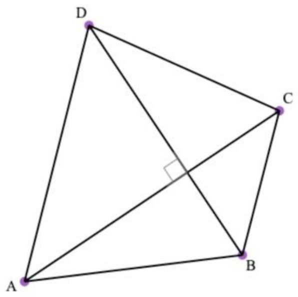
[7] https://de.serlo.org/mathe/71317/haus-der-vierecke

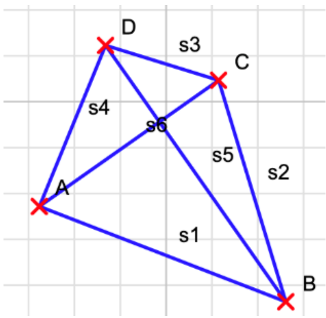
Ausgehend vom Stockwerk darüber könnte man noch auf folgende Idee kommen: Der symmetrische Drachen mit seinen sechs Freiheitsgraden ist dadurch gekennzeichnet, dass die Diagonalen orthogonal sind und eine die andere halbiert. Da kann man auch weniger fordern:

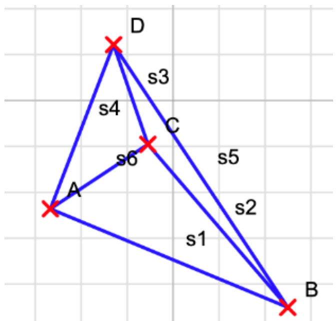
- Eine Diagonale halbiert die andere, ohne notwendig orthogonal zu sein. Das ist bekannt als das schiefe Drachenviereck.
- Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander.

Für den letzten Typ kenne ich keine Bezeichnung. Umso reizvoller ist es, einen Namen zu vergeben und Eigenschaften zu erkunden. „Halbdrachen" oder „Orthodiag". Ich wähle mal den ersten Namen.

Wie können Halbdrachen aussehen? Viereckstypen kann man mit Papier oder GeoGebra erkunden, aber noch besser geht es mit einem relational arbeitenden Programm[8], weil man in diesen Programmen einfach ein allgemeines Viereck zeichnet und dann Bedingungen setzt.

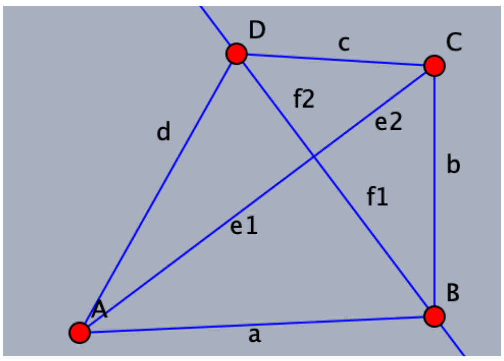






In der rechten Abbildung ist das Viereck ABCD konkav, weil die Ecke C einspringt und daher die Diagonale BD außerhalb verläuft. Bei solchen Vierecken gibt es eine interessante Besonderheit: Sie sind durch die Angabe der vier Punkte noch nicht eindeutig bestimmt, sondern man muss noch angeben, in welcher Reihenfolge die Punkte durchlaufen werden.

Welche Eigenschaften haben denn nun Halbdrachen? Die Diagonalen zerlegen den Halbdrachen in vier rechtwinklige Dreiecke. Man hat also die Gleichungen:



$a^2 = e_1^2 + f_1^2, b^2 = e_2^2 + f_1^2$

$c^2 = e_2^2 + f_2^2, d^2 = e_1^2 + f_2^2$

$e_1 + e_2 = e,\ f_1 + f_2 = f.$

Man sieht sehr leicht:

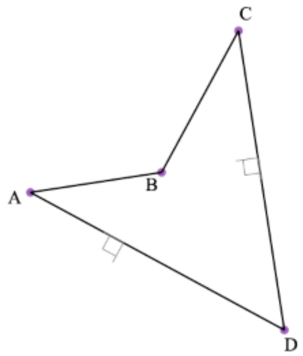
$$a^2 + c^2 = e_1^2 + f_1^2 + e_2^2 + f_2^2 = b^2 + d^2$$

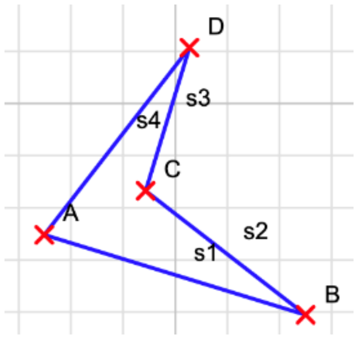
$$=> \quad a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

Eine schöne Gleichung!

[8] , z. B. https://geometryexpressions.com/gxweb/ oder https://myweb.rz.uni-augsburg.de/~oldenbre/jsfelix/F2d/jxfelix.html

Die obigen Überlegungen zeigen, dass das leere Zimmer im Haus der Vierecke nach Serlo gleich mit mehreren Kandidaten gefüllt werden könnte. Das kann den Blick dafür öffnen, dass es in der Mathematik nicht nur um richtig oder falsch, sondern auch um zweckmäßig und interessant geht. Welche dieser vier Viereckstypen könnten eine Bedeutung irgendwo haben? Vermutlich hält sich das in Grenzen, denn sonst wären diese Viereckstypen verbreiteter. Aber der mathematische Spieltrieb hat noch mehr Spielraum. Beispielsweise: Gibt es Vierecke, bei denen gegenüberliegende Seiten orthogonal sind? Also ein Parallelogramm, bei dem Parallelität durch Orthogonalität ersetzt wird? Die Antwort ist: Ja, aber sie sind alle konkav…





Für weitere Informationen: reinhard.oldenburg@uni-a.de

Symmetrie-Impuls

Hyperbeln und ihre schiefen Symmetrieachsen

Renate Motzer, Universität Augsburg

Bezüglich Symmetrien werden Funktionsgraphen im Unterricht häufig nur auf Achsensymmetrie zur y-Achse und auf Punktsymmetrie zum Ursprung hin untersucht. Diese Symmetrien lassen sich leicht an der Funktionsgleichung erkennen. Doch es kann auch andere Symmetrieachsen oder Symmetriepunkte geben. So erkennen Schüler*innen, dass Parabeln immer symmetrisch zur senkrechten Geraden durch den Scheitel verlaufen, dass also $x = x_S$ die (senkrechte!) Symmetrieachse beschreibt. Doch noch bevor die Jugendlichen in der 9. Klasse Parabeln kennen- und verschieben lernen, beschäftigen sie sich in der 8. Klasse mit Hyperbeln. Im Sachkontext von indirekter Proportionalität ist es ein Hyperbelast im I. Quadranten. Dass dieser achsensymmetrisch zur Winkelhalbierenden des I. Quadranten verläuft, ist relativ gut erkennbar. Auch an der Funktionsgleichung

$$y = \frac{A}{x}$$

welche sich sinnvoll zu $xy = A$ (Produktgleichheit) und damit auch zu

$$x = \frac{A}{y}$$

umformen lässt, sieht man die Symmetrie bzgl. dieser Geraden (welche die Gleichung $y = x$ hat). Lässt man nun auch negative x- und y-Werte zu, findet man den zweiten Hyperbelast und dass diese beiden Äste zueinander punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs sind. Dabei kommt außerdem die Achsensymmetrie zu $y = -x$, der Winkelhalbierenden des II. und IV. Quadranten dazu.

Wird nun die Hyperbel verschoben, also

$$f(x) = \frac{a}{x-b} + c,$$

so verschieben sich die Achsen und der Symmetriepunkt mit.
Bei den Parabeln in der 9. Klasse werden wir ebenso eine Verschiebung der Symmetrieachse beobachten, Verschiebungen nach oben oder unten ändern hier nichts an der Achse.

Noch später lernen die Schüler*innen Hyperbeln kennen, die schräge Asymptoten besitzen. Wie ist es nun hier mit der Symmetrie? Die Funktionsgraphen zu Funktionen mit den Gleichungen

$$f(x) = \frac{a}{x-b} + cx + d$$

besitzen je eine senkrechte Asymptote (bei $x = b$) und eine schräge mit der Gleichung $y = cx + d$. Oft tauchen die Gleichungen auch in der Form

$$f(x) = \frac{cx^2 + ex + h}{x-b}$$

auf, wobei sich durch Umformung zeigt, dass $e = d – bc$ und $h = a – bd$ ist.

Ich weiß nicht, ob Sie sich schon mal Gedanken über das Symmetrie-Verhalten der zugehörigen Graphen gemacht haben. Ich habe diesen Funktionstyp viele Jahre unterrichtet. Die Punktsymmetrie zum Schnittpunkt der Asymptoten ist relativ offensichtlich. Die Symmetrieachsen habe ich jedoch viele Jahre lang nicht gesehen. Erst als ich mich mit einer ähnlichen Frage im Zusammenhang mit Kegelschnitten beschäftigt habe, wurde mir klar, dass deren Symmetrien ja auch für die Hyperbeln gelten, die in der Schule als Funktionsgraphen auftauchen.

Betrachtet man Hyperbeln als Kegelschnitte, so dreht man das Koordinatensystem normalerweise so, dass die (immer aufeinander senkrecht stehenden) Symmetrieachsen als x- und y- Achse gewählt werden (bzw. als x_1- und x_2-Achse). Dann liegen die Asymptoten symmetrisch zu diesen (Haupt-) Achsen. Ein Blick in Wikipedia oder in die gute alte Formelsammlung, die früher im Abitur zugelassen war, verrät uns, dass die Hyperbeln der 8. Klasse (also diejenigen, bei denen die Asymptoten senkrecht aufeinander stehen) „gleichseitige Hyperbeln“ genannt werden.

In der Schulbetrachtung ist die eine Asymptote immer parallel zur y-Achse. Und der Rest, d.h. die zweite Asymptote und die Symmetrieachsen können aber „schräg“ (synonym zu „schief“) liegen.

Das Berechnen der Symmetrieachsen aus den Asymptoten gelingt normalerweise nicht mit „schönen“ Werten. Wie man eine Winkelhalbierende berechnet, lernt man auch erst in der analytischen Geometrie (der Vektorrechnung der Oberstufe).

GeoGebra kann Winkelhalbierende nicht nur zeichnen (konstruieren), sondern auch berechnen.

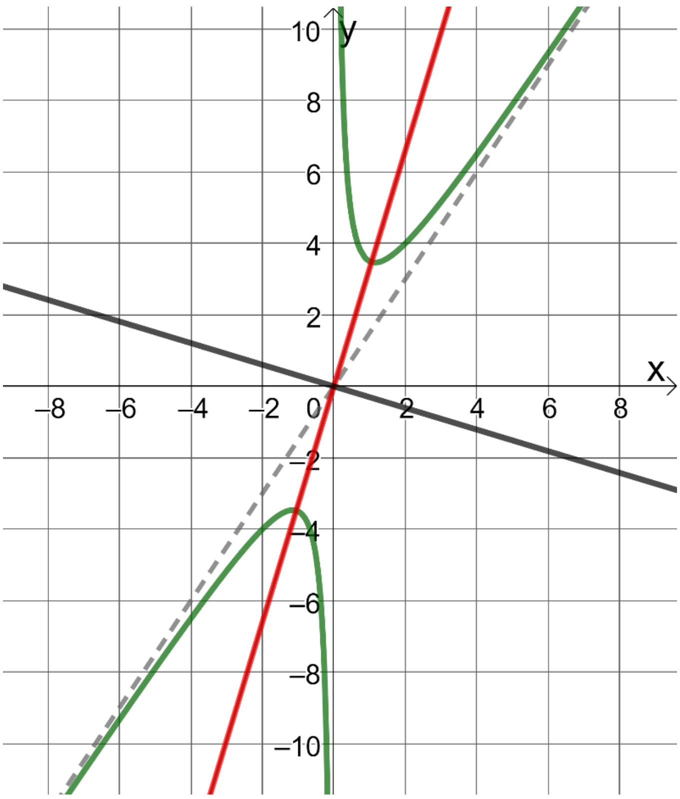
Im abgebildeten Beispiel mit

$$f(x) = \frac{2}{x} + 1{,}5x,$$

in dem die y-Achse und die Gerade g mit $g(x) = 1{,}5x$ die Asymptoten darstellen, gibt GeoGebra als Winkelhalbierende die beiden Geraden mit den Gleichungen $-0{,}96x + 0{,}29y = 0$ und $-0{,}96x - 0{,}29y = 0$ an.

Für Schüler*innen ist die Form der Geradengleichung erstmal ungewohnt. Dass es überhaupt Geradengleichungen sind, werden sie vielleicht erstmal nachrechnen wollen. Sehen Sie sofort, dass es Ursprungsgeraden sind oder zumindest, dass der Ursprung zu den Punkten gehört, die die Gleichungen erfüllen?

GeoGebra kann einem zumindest zeigen, dass es sich wirklich um Symmetrieachsen handelt, denn spiegeln wir einen Punkt der Hyperbel an einer der beiden Geraden, so erhalten wir einen anderen Punkt der Hyperbel. Im dargestellten Beispiel sieht man einen Punkt und seine beiden Spiegelpunkte.



Für den allgemeinen Typ

$$f(x) = \frac{a}{x-b} + cx + d$$

kann man bei GeoGebra Schieberegler für die Parameter einfügen. Auch den Punkt auf dem Graphen, den man spiegelt, kann man variieren und so dieses Symmetrieverhalten als etwas ganz Besonderes beobachten. Wann hat man schon zwei schrägliegende Symmetrieachsen und eine Punktsymmetrie in einem Funktionsgraphen (wenn es sich nicht trivialerweise um eine Gerade handelt).

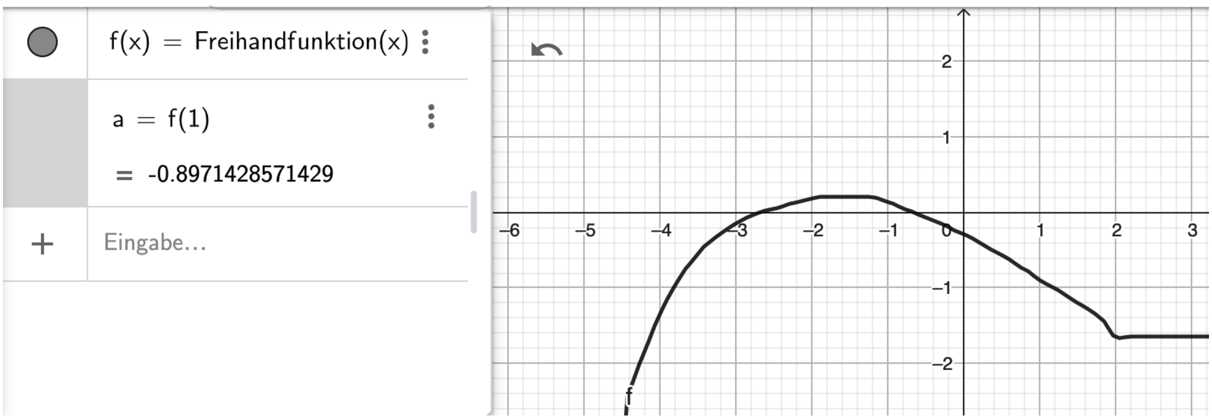
Für weitere Informationen: renate.motzer@uni-a.de

Freihandfunktionen in GeoGebra

Reinhard Oldenburg, Universität Augsburg

Die GeoGebra kann nicht nur zu Termen die Funktionsgraphen darstellen, sondern man kann Funktionsgraphen auch frei mit der Maus oder einem Stift zeichnen: Dazu dient die Funktion *Freihandskizze*.

Nun kann man die Lernenden beauftragen, den Graphen zu einer beliebigen Situation zu zeichnen – oder sich ganz frei einen Funktionsgraphen auszudenken.



Wie die Abbildung zeigt, kann man mit den so definierten Funktionen rechnen. Schön ist außerdem, dass man mit diesen Funktionen operieren kann. Man kann etwa $2 * f(x)$ oder $f(x) + \sin(x)$ eingeben.

Was kann man damit machen? Lassen Sie doch zwei Schüler*innen zusammenarbeiten: die erste soll den Graph einer umkehrbaren Funktion zeichnen und die zweite den Graph der Umkehrfunktion dazu. Danach wird die Hintereinanderausführung der Funktionen von GeoGebra gezeichnet und die Lernenden können beurteilen, wie gut sie das geschafft haben.

Auch Erkundungen zur Analysis lassen sich damit durchführen. Wenn Sie Interesse daran haben, wenden Sie sich bitte an reinhard.oldenburg@uni-a.de.

Das unbekannte Wesen: Kopfgeometrie am Würfel

Andreas Merkel, Universität Augsburg

In universitären Veranstaltungen und auf schulischen Fortbildungen konnte der Autor immer wieder feststellen, dass die Beantwortung der folgenden Fragen große Schwierigkeiten bereitet, obwohl sie sich auf den bekanntesten aller Körper, den Würfel, beziehen:

1. Unter welchem Winkel α schneiden sich zwei Raumdiagonalen eines Würfels?
2. Unter welchem Winkel γ taucht eine Raumdiagonale eines Würfels in eine Seitenflächenebene des Würfels ein?
3. Besteht ein Zusammenhang zwischen den beiden Winkeln α und γ?

Natürlich bietet es sich an, diese Fragen anhand von aussagekräftigen Skizzen zu klären. Darauf wird im Folgenden jedoch verzichtet, stattdessen sollen sie kopfgeometrisch beantwortet werden. Die Leser:innen sind dabei eingeladen, die Beschreibungen nachzuvollziehen, auch wenn mancher Satz eventuell zweimal gelesen werden muss. Eine 3D-Animation des Sachverhalts als GeoGebra-Aktivität findet man unter dem QR-Code unten. Es wird vorgeschlagen, diese erst nach Lektüre des Artikels zu betrachten.

Zur 1. Frage: Eine überwältigende Mehrheit der Befragten war der Meinung, dass sich die Raumdiagonalen unter $\alpha = 90°$ schneiden, vermutlich weil der 90°-Winkel den Würfel dominiert. Nicht selten wurde sogar vermutet, dass sich die Raumdiagonalen überhaupt nicht schneiden. Beide Fehlvorstellungen sollen im Folgenden gleichzeitig ausgeräumt werden. Dazu stellen wir uns den Würfel mit einer Kantenlänge von 1 Meter (= 1) vor und schrumpfen uns auf Mausgröße. Wir positionieren uns frontal vor dem Würfel. Zwei denkbare Raumdiagonalen verlaufen von links unten vorne nach rechts oben hinten und von rechts unten vorne nach links oben hinten. Diese beiden Raumdiagonalen schneiden sich, denn sie liegen in einer Ebene, die eine Rampe von der unteren vorderen horizontalen Kante des Würfels zur oberen hinteren horizontalen Kante des Würfels darstellt. Diese Rampe hat die Gestalt eines Vierecks, die Diagonalen dieses Vierecks sind die Raumdiagonalen des Würfels. Dieses Viereck ist sogar ein Rechteck – aber keinesfalls ein Quadrat (in dem sich die Diagonalen unter 90° schneiden). Von der Rechtecksrampe wollen wir nun die Seitenlängen bestimmen. Die eine Seitenlänge kennen wir schon, das ist die vordere untere Kante des Würfels mit der Länge 1. Unsere Maus läuft nun um die rechte untere Ecke des Würfels herum und betrachtet den Würfel von der Seite. Die Maus sieht die zweite Seite der Rechtecksrampe, diese stellt die Flächendiagonale der (quadratischen) Würfelseitenfläche dar und hat damit die Länge $\sqrt{2}$. Unsere Rechtecksrampe hat also DIN-A-Format und ist damit verblüffend lang. Unser Schnittwinkel kann somit mühelos durch einfaches Nachmessen mit dem Geodreieck etwa an einem Blatt Kopierpapier bestimmt werden. Nicht selten wird an dieser Stelle vermutet, dass α wenn schon nicht 90° dann doch wenigstens 60° ist, weil dieser hochsymmetrische Winkel gut zum hochsymmetrischen Würfel passt. Auch dies kann jedoch widerlegt werden: Die Raumdiagonalen zerlegen die Rechtecksrampe in zwei Paare gleichschenkliger Dreiecke, deren Basen die Länge 1 bzw. $\sqrt{2}$ haben. Wäre der Schnittwinkel 60°, dann wäre das eine Paar gleichschenkliger Dreiecke sogar gleichseitig. Im Schnittpunkt der Raumdiagonalen im Mittelpunkt der Rampe würden dann die Ecken zweier gleichseitiger Dreiecke mit Seitenlänge 1 zusammenkommen. Die Raumdiagonalen hätten damit die Länge 2 und wären „gefühlt“ zu lang. Wer diese Anschauung (noch) nicht hat, rechnet im Kopf (!) nach: Wir würden nach dieser Vorstellung im Würfel ein rechtwinkliges Stützdreieck finden, bestehend aus einer Raumdiagonalen, einer vertikalen Würfelkante und einer Würfelflächendiagonalen, mit der Hypotenuse 2 und den Katheten 1 und $\sqrt{2}$, das passt nicht mit dem Satz von Pythagoras zusammen. Ist α nun größer oder kleiner als 60°? Da die Raumdiagonale im Würfel mit der Kantenlänge 1 bekanntlich $\sqrt{3}$ lang ist und $\sqrt{3} < 2$, sind die beiden gleichschenkligen Dreiecke mit Basis 1, die im Schnittpunkt der Raumdiagonalen im Mittelpunkt der Rampe eine Ecke gemeinsam haben, „gedrungener“ als die oben angesprochenen gleichseitigen Dreiecke. Damit ist der gesuchte Schnittwinkel größer als 60°. Zusammen mit der ersten Überlegung wissen wir nun: α liegt zwischen 60° und 90°. Unsere Maus bildet ganz pragmatisch den Mittelwert und schätzt α auf 75°. Diese Schätzung ist ziemlich gut, exakt gilt $\alpha = 71{,}52\ldots°$, ein krummer, eher wenig bekannter Winkel, der immer wieder im Kontext der Platonischen Körper auftaucht. Die hohe Symmetrie des Sachverhalts spiegelt sich in der zugehörigen Gleichung $\cos(\alpha) = \frac{1}{3}$, die man mit Skalarprodukt oder Kosinussatz erhält. Wenn man auf den halben Schnittwinkel geht, braucht man nur die elementare Definition des Cosinus und erhält mit $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ eine Gleichung, die zwar nicht ganz so strahlt wie die erste, aber immer noch hübsch ist und vielleicht sogar im Kopf aufgestellt werden kann! Aus Symmetriegründen schneiden sich zwei beliebige der insgesamt vier Raumdiagonalen stets im Winkel $\alpha = 71{,}52\ldots°$.

Zur 2. und 3. Frage: Hier wird gerne vermutet, dass die Raumdiagonale unter $\gamma = 45°$ in die Seitenflächenebene des Würfels eintaucht. Algebraisch betrachtet ergibt sich daraus mit der oben thematisierten Vermutung $\alpha = 90°$ für den Schnittwinkel der Raumdiagonalen, dass dieser doppelt so groß ist wie γ. Während die erste Vermutung ($\gamma = 45°$) falsch ist, ist die zweite Vermutung ($\alpha = 2\gamma$) tatsächlich richtig. Damit kommt es hier häufig zu einer kuriosen Situation: Aus zwei Fehlvorstellungen ($\alpha = 90°, \gamma = 45°$) entsteht eine richtige Behauptung! Unsere Maus hilft uns wieder, den Sachverhalt zu durchdringen. Sie krabbelt in den Würfel und stellt sich auf den Mittelpunkt der Grundfläche. Dieser ist gleichzeitig der Mittelpunkt einer Flächendiagonalen. Die Sonne scheint senkrecht von oben in den Würfel, damit ist die Flächendiagonale, auf der die Maus steht, der Schatten von zwei Raumdiagonalen des Würfels. Die Maus greift eine dieser Raumdiagonalen heraus. Zusammen mit der Flächendiagonalen und einer senkrechten Würfelkante bildet diese ein Stützdreieck des Würfels. Dieses Stützdreieck ist rechtwinklig, die Hypotenuse ist die Raumdiagonale. Wäre der Winkel, unter dem die Raumdiagonale in die Seitenfläche eintaucht, tatsächlich 45° groß, dann wäre dieses Stützdreieck gleichschenklig-rechtwinklig. Das kann aber nicht sein, denn seine Katheten, die Würfelkante und die Flächendiagonale, haben die Längen 1 und $\sqrt{2}$. Aber wie groß ist der Winkel γ nun? Die Maus schaut wieder nach oben. Sie sieht die beiden eben genannten Raumdiagonalen und α, den Schnittwinkel der Raumdiagonalen. Die Maus erkennt, dass sie im Mittelpunkt der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks steht. Die Basis dieses Dreiecks ist die Flächendiagonale des Würfels, die Spitze dieses Dreiecks ist der Schnittpunkt der Raumdiagonalen, die beiden Basiswinkel sind so groß wie γ. Der Winkel an der Spitze dieses gleichschenkligen Dreiecks ist ein Nebenwinkel von α, die beiden Winkel ergänzen sich zu 180°. Damit ist α ein Außenwinkel dieses gleichschenkligen Dreiecks und damit so groß wie die beiden nichtanliegenden Innenwinkel, kurz: $\alpha = \gamma + \gamma$.

Leider kennt die Maus den Begriff *Außenwinkel* und den relativ unbekannten Satz vom Außenwinkel am Dreieck nicht, aber natürlich den Satz von der Innenwinkelsumme im Dreieck. Die Maus überlegt sich $\gamma + \gamma + (180° - \alpha) = 180°$ und erhält auch so $\alpha = 2\gamma$. Die Maus fragt sich, ob man das auch ohne Rechnung sehen kann. Da fällt ihr etwas auf: Sie verschiebt die Flächendiagonale, auf der sie steht, parallel nach oben, bis diese durch den Schnittpunkt der Raumdiagonalen verläuft und α, den Schnittwinkel der Raumdiagonalen, halbiert. Dann sind $\frac{\alpha}{2}$ und γ Wechselwinkel an parallelen Geraden und damit gleich groß! Kluge Maus!

Für weitere Informationen: andreas.merkel @uni-a.de

Zur GeoGebra-Aktivität:

https://www.geogebra.org/m/rpv392pf

„ChatGPT und der Faktor ‚Mensch' im Mathematikunterricht"

Prof. Brigitte Lutz-Westphal (FU Berlin) schreibt[9]:

(…) „Zunächst einmal sind nach aktuellem Stand viele Antworten von ChatGPT auf mathematische Fragen einfach falsch. Das ließe sich als Anlass nehmen, im Unterricht damit reflektierend zu arbeiten und anhand der fehlerhaften Texte die erlernten Begriffe und Konzepte auszuschärfen und damit argumentieren zu üben. Hier ein paar Stilblüten von ChatGPT aus einem „Gespräch" zu Winkeln: „Wenn zum Beispiel eine Gerade die beiden parallelen Seiten eines Dreiecks schneidet […]", „Gegeben ist ein Rechteck mit einem Winkel von 45 Grad. Wie groß sind die anderen drei Winkel?" bzw. aus einem vermeintlichen Beweis des Satz des Pythagoras: „Da das rechtwinklige Dreieck ein rechtwinkliges Parallelogramm ist, gilt: h = a + b" (…). Die übergreifende Botschaft, vorsichtig im Umgang mit computergenerierten Informationen zu sein und das Vermitteln von Strategien, um kritisch und informiert damit umgehen zu können, stehen als Bildungsauftrag ganz im Vordergrund.

Aber stellen wir uns einmal auf den Standpunkt, es wäre schon so weit, dass solche KI-basierten Chatbots uns fehlerfreie, angenehm zu lesende und mit korrekten Quellenangaben versehene Texte schreiben könnten? Was bliebe uns Menschen dann noch zu tun? Was wäre dann das Ziel von Schule und Unterricht? Damit kommen wir auf essentielle Fragen zum Lehren und Lernen. Leider finden wir im traditionellen Schulunterricht viel zu häufig ein eher mechanisiertes Lernen. Wissen wird „vermittelt" und anschließend „abgefragt" und es werden defizitorientierte Noten vergeben. Auch wenn es schon seit Jahrzehnten zahllose Ansätze gibt, wie Unterricht anders sein könnte, so hält sich diese traditionelle Auffassung von Unterricht sehr hartnäckig und gilt vielen Lehrpersonen gerade jetzt unter dem eklatanten Lehrkräftemangel als alternativlos (weil es zeiteffizient sei und funktioniere). Nun aber greift ChatGPT dieses Modell direkt an. Wo früher die Lehrperson die einzige war, die das zu vermittelnde Wissen überhaupt zur Verfügung hatte und die über den erreichten Wissensstand urteilen konnte, können plötzlich alle Lernenden den Chatbot direkt befragen und sich Dinge erklären lassen und sich testen lassen. Was soll also der Mehrwert von schulischem Unterricht sein?

Hier kommen Konzepte wie das Dialogische Lernen (nach Ruf/Gallin (1999) *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik,* Band 1 und 2) ins Spiel, die schon seit vielen Jahren den Schwerpunkt auf die Selbsttätigkeit, auf Interaktion und Kommunikation legen und auf individualisiertes Lernen. Zusätzlich zum Aufbau von Wissen, Fertigkeiten und fachlichen Kompetenzen geht es hier darum, mit dem individuellen Potential der Lernenden weiterzuarbeiten, durch diese Verschiedenheiten voneinander zu lernen und schließlich gemeinsame Standpunkte auszuarbeiten. Dies geschieht über Lernjournale, in denen die Lernenden ihre ganz eigenen Gedanken zu dem jeweiligen Lernauftrag (der meist als offene Aufgabe in das Thema zielt) niederlegen. Mit Hilfe von gegenseitiger

[9] https://www.linkedin.com/pulse/chatgpt-und-der-faktor-mensch-im-schulischen-brigitte-lutz-westphal/

Rückmeldung und durch die Lehrperson zusammengestellten „Autographen-sammlungen“ mit interessanten Auszügen aus den Lernjournalen kommt ein gemeinsames Nachdenken der Lerngruppe zu den unterschiedlichen Gedanken, Ideen, Herangehensweisen und auch Hürden zustande. Hier könnten auch von ChatGPT erzeugte Texte einfließen und genauso gewürdigt und kritisch hinterfragt werden, wie diejenigen der Mitschüler*innen.

Wie denken andere? Was sehen sie als wesentlich und spannend im betrachteten Thema an? Wo haben sie Ideen, die mein Denken erweitern? Für welche meiner Gedanken interessieren sich die anderen? Was ist das grundsätzlich Interessante und Nützliche an dem Thema? All diese Fragen sind Schritte zu einem selbstbestimmten, reflektierten und dialogischen Umgang mit Fachinhalten. Das Erkennen des eigenen Standpunktes (ICH), das Würdigen der Standpunkte der anderen Lernenden (DU), das Aushandeln von Wegen, Ideen und Lösungskonzepten und das gemeinsame Ergebnis (WIR) bekommen im Dialogischen Lernen nach Ruf/Gallin explizit ihren Raum. Hier kommt der „Faktor Mensch“ zum Tragen und es lässt sich eine Unterrichtskultur aufbauen, die ermutigend und demokratiefördernd ist. Diese geht Hand in Hand mit förderorientierten Leistungsrückmeldungen, die den Lern- und Arbeitsprozess berücksichtigen und ihr Urteil stets mit Möglichkeiten zur Weiterentwicklung verbinden (siehe z.B. Lutz-Westphal/d’Hénin, Leistungsrückmeldung mit der 3G-Regel (gesehen – gewürdigt – (an)geleitet werden):

https://www.stiftungrechnen.de/wp-content/uploads/2022/09/STR22-3G-Publikation_05-Doppelseiten.pdf [abgerufen am 15.02.2023])

Der jeweils individuelle Prozess des Wissensaufbaus und des Entdeckens von Zusammenhängen, das Einordnen in bereits Bekanntes, das Erarbeiten von Standpunkten, Einschätzungen und Handlungsoptionen, die Fähigkeit zum Problemlösen und kreativen Denken, das Anerkennen von Verschiedenheiten, das Aushandeln von konsensualen Ergebnissen, der Genuss am erfolgreichen Meistern von Aufgaben: All das und vieles mehr bleiben Prozesse, die wir als Menschen für unsere persönliche Entwicklung und das Zusammenleben brauchen, genauso wie für einen kompetenten Umgang mit KI-Werkzeugen und von ihnen erzeugte Fake-News. ChatGPT ist ein Werkzeug, das wir darin einbinden können, ersetzen wird es all dies nicht. Aber gerade weil es ChatGPT gibt, können wir diese menschliche Sicht auf das Lernen stärker hervorheben und unterstützen und somit zukunftsfähige Lernsettings schaffen.“

Buchbesprechung: *Mathematik sehen und verstehen*
von Dörte Haftendorn

Wenn man an dunklen Winterabenden gemütlich auf dem Sofa sitzt und etwas Schönes aus der Mathematik lesen will, bietet sich das Buch von Dörte Haftendorn an. Sie war sehr lange Lehrerin an einem Gymnasium in Lüneburg und anschließend in der Lehrerausbildung der Universität Lüneburg aktiv. Das Buch ist Ausdruck ihrer Mathematikbegeisterung im Farbdruck. Mit sehr vielen gut gemachten Abbildungen und verständlichen Erklärtexten wird ein Kaleidoskop interessanter mathematischer Fragen aufgezogen. Sie zielt dabei vor allem auf ein grundlegendes Verständnis der mathematischen Theorien, nicht auf die formale Vermittlung von Theorie. Das Buch ist Grundlage einer Vorlesung, die an der Universität Lüneburg alle Studierende (also gerade die, die nicht Mathematik studieren) hören, um einen allgemeinbildenden Einblick in die Mathematik als relevante, aktuelle Wissenschaft zu bekommen.

Das Spektrum der Themen umfasst exotische Dinge, die sich eher als Exkurs anbieten, aber auch um Standard-Themen der Mathematik und des Mathematikunterrichts: Kryptographie, Fraktale, Knotentheorie, Parabelbrücken, Eigenschaften ganzrationaler Funktionen, Schwingungen, exponentielles Wachstum, Integralrechnung, Bezierkurven und Binomialverteilung – um nur einige zu nennen.

Viele der Darstellungen sind mit Computerprogrammen erstellt, sehr oft mit GeoGebra, und das Buch enthält viele Anregungen für eigene Erkundungen und Variationen. Es gibt sogar Übungsaufgaben mit Lösungen. Während einige der Themen über die Schulmathematik hinausgehen, finden sich auch viele Lehrplanthemen, für die es originelle Anregungen gibt. Das Gleiche gilt für etliche Themen, die künftig im Vertiefungsfach des neuen G9 Lehrplans behandelt werden können. Zusammengefasst: Hier liegt ein Buch vor, das Lust auf Mathematik macht.

Dörte Haftendorn:

Mathematik sehen und verstehen. Springer, 2019. 978-3-662-58136-0

Informations-Impulse

Termine und Informationen

Tag der Mathematik für Lehrkräfte: 29.02.2024

Tag der Mathematik für Schülerinnen und Schüler: 02.03.2024

Mathe-Schüler-Zirkel:

Für Schüler*innen der Jahrgangsstufen 5 bis 13, die Spaß und Freude an Mathematik haben… Zur Anmeldung:

uni-augsburg.de/de/fakultaet/mntf/math/einricht/mathezirkel/

Rent a Prof:

Buchen Sie einen Mathematik-Professor für einen Vortrag an Ihrer Schule zu folgenden Themen: Warum Bienen ein Gespür für Mathematik haben, Die Mathematik hinter der Bildverarbeitung, Ist Chaos zufällig?, u.v.m.!

uni-augsburg.de/de/fakultaet/mntf/math/studium/studiendekan/rent-a-prof/

impulse digital:

impulse finden Sie auch als digitale Version unter:

https://www.uni-augsburg.de/de/fakultaet/mntf/math/prof/dida/impulse/

Newsletter:

Wenn Sie regelmäßig Informationen erhalten wollen, z. B. zu **Oberseminar-Terminen**, melden Sie sich gerne per Mail an *renate.motzer@uni-a.de*

impulse wird herausgegeben vom Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik der Universität Augsburg.
Verantwortlicher Ansprechpartner:
Prof. Dr. Reinhard Oldenburg, reinhard.oldenburg@math.uni-augsburg.de

Der Abdruck von GeoGebra-Screenshots wurde durch die GeoGebra GmbH genehmigt. Auflage: 150