F25-T1-A3

Sei $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$ eine 3×3- Matrix, deren charakteristisches Polynom $\chi_A(X) \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist. Seien $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $\chi_A(X)$ und $\mathbb{Q}(\alpha)$ der davon erzeugte Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{C}$. Betrachten Sie die Multiplikation mit α:

$$\phi : \mathbb{Q}(\alpha) \to \mathbb{Q}(\alpha), \quad x \mapsto \alpha \cdot x.$$

a) Zeigen Sie, dass ϕ eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung ist.

b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix B von ϕ bezüglich der Basis $1, \alpha, \alpha^2$ von $\mathbb{Q}(\alpha)$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum und zeigen Sie, dass deren charakteristisches Polynom identisch mit dem von A ist, also $\chi_B(X) = \chi_A(X) \in \mathbb{Q}[X]$ gilt.

c) In der Situation von b): Zeigen Sie, dass die beiden Matrizen A und B, betrachtet in $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$ ähnlich sind.

Lösung Wir bemerken zunächst, dass $\deg(\chi_A) = 3$ und da $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von χ_A ist ist $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}[\alpha]$ und demnach $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$, also $\mathbb{Q}(\alpha)$ ein 3-dimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

a) Sei $a \in \mathbb{Q}$ und $x, y \in \mathbb{Q}(\alpha)$. Wir rechnen $\phi(ax + y) = \alpha \cdot (ax + y) = \alpha \cdot ax + \alpha \cdot y = a\alpha \cdot x + \alpha \cdot y = a\phi(x) + \phi(y)$. Das zeigt die Behauptung.

b) Wir berechnen $\phi(1) = \alpha, \phi(\alpha) = \alpha^2$ und $\phi(\alpha^2) = \alpha^3$. Sei $-X^3 + aX^2 + bX + c = \chi_A(X)$, mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$, dann gilt $\alpha^3 = a\alpha^2 + b\alpha + c$ ($\chi_A(X) = \det(A - X \cdot \mathrm{id})$). Demnach ist $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$. Wir erhalten nun $\chi_B(X) = \det(B - X \cdot \mathrm{id}) = X^2(a - X) + c + bX = -X^3 + aX^2 + bX + c = \chi_A(X)$.

c) Da $\mathrm{char}(\mathbb{Q}) = 0$ und $\chi_A(X)$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist (also separabel!), haben die Eigenwerte von A respektive B algebraische Vielfachheit 1. Demnach ist A und auch B diagnolisierbar und demnach ähnlich zu einer Matrix $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$, wobei β und γ die weiteren (komplexen) Nullstellen von $\chi_A = \chi_B$ sind. Da Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation definiert, die insbesondere transitiv ist, gilt auch $A \sim B$.