# H23-T3-A2

Es seien $\alpha := \sqrt{\sqrt{12}+3} \in \mathbb{R}, \beta := i\sqrt{\sqrt{12}-3} \in \mathbb{C}$ und $L := \mathbb{Q}(\alpha,\beta) \subseteq \mathbb{C}$.

a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $f = m_{\alpha,\mathbb{Q}}$ von $\alpha$ über $\mathbb{Q}$ und zeigen Sie, dass auch $\beta$ eine Nullstelle von $f$ ist.

b) Begründen Sie, warum $L|\mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung ist.

c) Zeigen Sie, dass $L = \mathbb{Q}(\alpha, i)$ gilt und bestimmen Sie den Grad $[L : \mathbb{Q}]$.

d) Zeigen Sie, dass die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ einen Normalteiler der Ordnung 2 enthält.

**Lösung**

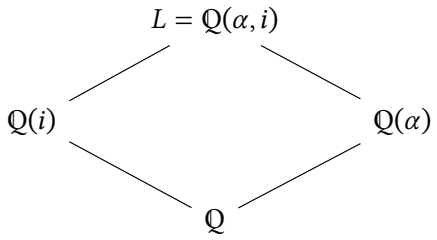
a) Wir berechnen dazu die folgendenden Potenzen von $\alpha$: $\alpha^2 = \sqrt{12}+3, \alpha^4 = 12 + 6\sqrt{12} + 9 = 21 + 6\sqrt{12}$. Wir betrachten daher als Kandidat für das Minimalpolynom $\tilde{f} = X^4 - 6X^2 - 3$. $\tilde{f}$ ist normiert und hat $\alpha$ als Nullstelle. Zudem ist $\tilde{f}$ irreduzibel nach Eisenstein ($p = 3$) und daher gilt $\tilde{f} = f = m_{\alpha,\mathbb{Q}}$. Man rechnet leicht nach, dass $f(\beta) = 0$ gilt.

b) Da $\mathrm{char}(\mathbb{Q}) = 0$ folgt sofort, dass $L|\mathbb{Q}$ seperabel ist. $L$ ist zudem Zerfällungskörper von $f$ über $\mathbb{Q}$ (betrachte a) und die Tatsache, dass $f$ ausschließlich gerade Exponenten von $X$ besitzt, daher sind neben $\alpha$ und $\beta$ auch $-\alpha$ und $-\beta$ die einzigen Nullstellen von $f$) und daher ist $L|\mathbb{Q}$ eine normale Erweiterung und deshalb galoisch.

c) Man betrachte $\alpha\beta = i\sqrt{3}$ sowie $\alpha^2 - \beta^2 = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$. Hieraus folgt $i = \frac{4\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}$. Wiederum folgt $i \in L$ und daraus $\mathbb{Q}(\alpha, i) \subset L$. Desweiteren gilt nach a)

$$\alpha^2 = \sqrt{12}+3 = 2\sqrt{3}+3 \Rightarrow \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\alpha,i) \Rightarrow \beta = \frac{i\sqrt{3}}{\alpha} \in \mathbb{Q}(\alpha,i).$$

Das zeigt nun auch $L \subset \mathbb{Q}(\alpha, i)$. Man Betrachte nun den folgenden Körperturm:

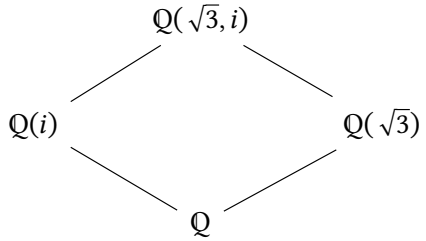


Aus den obigen Aufgaben ergibt sich $[\mathbb{Q}(\alpha)] = 4$ zudem ist bekannt, dass $[\mathbb{Q}(i) : \mathbb{Q}] = 2$. Da die jeweiligen Minimalpolynmome auch Kandidaten für die obige Stufe des Turmes sind (diagonal), gilt $[L : \mathbb{Q}(i)] \leq 4$ und $[L : \mathbb{Q}(\alpha)] \leq 2$. Es folgt also aus der Gradformel, dass $[L : \mathbb{Q}] \leq 8$ und $2|[L : \mathbb{Q}]$ sowie $4|[L : \mathbb{Q}]$. Schließlich erhält man $[L : \mathbb{Q}] \in \{4, 8\}$.Angenommen $[L : \mathbb{Q}] = 4$ dann folgt $i \in \mathbb{Q}(\alpha)$ was ein Widersrpuch dazu ist, dass $\alpha \in \mathbb{R}(\Rightarrow \mathbb{Q}(\alpha) \subset \mathbb{R})$ gilt. Es folgt nun $[L : \mathbb{Q}] = 8$.

d) Wir betrachten $\gamma = i + \sqrt{3}$ und dessen Potenzen $\gamma^2 = 2 + 2\sqrt{3}$, $\gamma^3 = 8i$ und $\gamma^4 = 16 + 8\sqrt{3}$. Betrachte zudem $g = X^4 - 4X^2 + 16$, welches das Minimalpolynom von $\gamma$ über $\mathbb{Q}$ ist, denn es hat Grad 4 ($[\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}] \overset{(*)}{=} 4$, denn wie man sich leicht überzeugt ist $\mathbb{Q}(\gamma) \overset{(**)}{=} \mathbb{Q}(i, \sqrt{3})$), ist normiert und hat $\gamma$ als Nullstelle. Faktorisiert man $g$ so sieht man

$$g = (x - (i - \sqrt{3}))(x - (i + \sqrt{3}))(x + (i - \sqrt{3}))(x + (i + \sqrt{3})) \in \mathbb{Q}(i, \sqrt{3})[X].$$

Es folgt daher, dass $\mathbb{Q}(i, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\gamma)$ der Zerfällungskörper von $g$ ist, woraus folgt das $\mathbb{Q}(\gamma)|\mathbb{Q}$ normal ist. Nach dem Zusatz zum Hauptsatz der Galoistheorie folgt, dass $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}(\gamma)) \lhd \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ ein Normalteiler von Ordnung 2.
Zu (*):




$[\mathbb{Q}(i) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 2$ ($m_{\sqrt{3},\mathbb{Q}} = X^2 - 3, m_{i,\mathbb{Q}} = X^2 + 1$), mit ähnlicher Argumentation wie oben ($i \notin \mathbb{Q}(\sqrt{3})$) folgt (*).
Zu (**):
$\gamma^3 = 8i \Rightarrow i \in \mathbb{Q}(\gamma) \Rightarrow \sqrt{3} = \gamma - i \in \mathbb{Q}(\gamma)$.