F23-T2-A1

a) Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

$$7 \mid (10a + b) \Leftrightarrow 7 \mid (a - 2b).$$

b) Bestimmen Sie, für welche $r \in \mathbb{R}$ das folgende lineare Gleichungssystem (i) keine, (ii) genau eine, (iii) unendlich viele Lösungen hat.

$$\begin{array}{rcrcrcl} rx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ry & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & rz & = & 1 \end{array}$$

c) Geben Sie ein externes direktes Produkt zyklischer Gruppen an, das isomorph ist zur Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/40\mathbb{Z})^\times$.
(Hinweis: Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen.)

d) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren des Endomorphismus

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \varphi(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x - 2z \\ 0 \\ -2x + 4z \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag. Zu a). Da $\mathbb{Z}_7$ ein Körper ist, gilt:

$$\begin{aligned} 7 \mid (10a + b) &\iff [0]_7 = [10a + b]_7 \\ &\iff [0]_7 = [5]_7 \cdot [10a + b]_7 \\ &\iff [0]_7 = [50]_7[a]_7 + [5]_7[b]_7 \\ &\iff [0]_7 = [1]_7[a]_7 + [-2]_7[b]_7 \\ &\iff [0]_7 = [a - 2b]_7 \\ &\iff 7 \mid (a - 2b) \end{aligned}$$

Zu b). Wir berechnen zunächst die Determinante von $A := \begin{pmatrix} r & 1 & 1 \\ 1 & r & 1 \\ 1 & 1 & r \end{pmatrix}$:

$$\det(A) = r^3 + 2 - 3r = (r - 1)^2(r + 2).$$

Im Falle von $r \neq 1$ und $r \neq -2$ ist A invertierbar und damit gibt es genau eine Lösung der Gleichung $A \cdot \mathbf{v} = \mathbf{1}$, nämlich $A^{-1} \cdot \mathbf{1}$.
Für $r = 1$ sieht man leicht, dass $l = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}^T$ eine Lösung des Gleichungssystems ist. Wegen $\mathrm{rg}(A) = 1 < 3$ hat $A\mathbf{v} = 0$ unendlich viele Lösungen, sodass auch das inhomogene Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

Für $r = -2$ gibt es keine Lösung: angenommen, es gäbe eine solche, dann führt Aufaddieren der drei Gleichungen zu dem Ergebnis

$$0x + 0y + 0z = 3,$$

was ein Widerspruch ist.
Zu c). Unter Verwendung des chinesischen Restsatzes sieht man leicht:

$$\mathbb{Z}_{40}^{\times} \cong (\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_8)^{\times} \cong \mathbb{Z}_5^{\times} \times \mathbb{Z}_8^{\times} \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

In der letzten Isomorphie ist eingegangen, dass alle Elemente von $\mathbb{Z}_8^{\times} = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$ Ordnung 2 haben, sodass $\mathbb{Z}_4$ als Isomorphietyp ausscheidet und nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen nur der Isomorphietyp $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ infrage kommt.
Zu d). Die Abbildung φ ist gegeben durch $v \mapsto M \cdot v$ für

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_3) = -\lambda(1-\lambda)(4-\lambda) + 4\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 4 - 4) = -\lambda^2(\lambda - 5),$$

sodass wir die Eigenwerte $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = 0$ ablesen können. Wir bestimmen weiter die Eigenräume:

- $E_M(\lambda_1) = \ker(M - 5I_3) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=:e_1} \rangle,$
- $E_M(\lambda_2) = \ker(M - 0I_3) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:e_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:e_3} \rangle.$

Dankenswerterweise sind die Eigenvektoren bereits orthogonal, denn man sieht leicht $e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_3 = e_3 \circ e_1 = 0$. Die ersten beiden müssen noch normalisiert werden, was uns schlussendlich die Basis

$$\frac{1}{\sqrt{5}} e_1, \frac{1}{\sqrt{5}} e_2, e_3$$

liefert.