

F11-T2-A1

Bestimmen Sie alle ganzzahligen Lösungen des folgenden Systems:

$$\begin{aligned}x &\equiv 1 \pmod{2} \\x &\equiv 2 \pmod{3} \\x &\equiv 3 \pmod{5}\end{aligned}$$

Lösungsvorschlag. Nach dem chinesischen Restsatz ist $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \simeq \mathbb{Z}_{2 \cdot 3 \cdot 5} = \mathbb{Z}_{30}$, das heißt die Lösung ist eindeutig modulo 30. Wir erinnern uns, dass die Umkehrabbildung zum kanonischen Morphismus

$$\pi: \mathbb{Z}_{30} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5, \quad [a] \mapsto ([a], [a], [a])$$

folgendermaßen gegeben ist: Finden wir $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{Z}_{30}$ mit $\pi(e_1) = ([1], [0], [0])$, $\pi(e_2) = ([0], [1], [0])$ und $\pi(e_3) = ([0], [0], [1])$, so ist $\pi^{-1}([a], [b], [c]) = [ae_1 + be_2 + ce_3]$. Diese e_i können wir entweder durch Ausprobieren herausfinden, oder aber systematisch bestimmen anhand der folgenden Überlegung: Gegeben drei paarweise teilerfremde Zahlen p_1, p_2, p_3 , können wir jeweils $[a_1] := ([p_2 p_3])^{-1} \in \mathbb{Z}_{p_1}$, $[a_2] := ([p_1 p_3])^{-1} \in \mathbb{Z}_{p_2}$ und $[a_3] := ([p_1 p_2])^{-1} \in \mathbb{Z}_{p_3}$ bestimmen. Unter Verwendung der jeweiligen Repräsentanten erhalten wir daraus Elemente $e_1 := [a_1 p_2 p_3]$, $e_2 := [a_2 p_1 p_3]$ und $e_3 := [a_3 p_1 p_2]$, die nach Konstruktion die gewünschten Eigenschaften besitzen. In unserem Falle also $e_1 = [15]$, $e_2 = [10]$, $e_3 = [6]$. Damit erhalten wir

$$\pi^{-1}([1], [2], [3]) = [15 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 6] = [23] \in \mathbb{Z}_{30}.$$

Die Menge sämtlicher Lösungen in \mathbb{Z} ist also $\{23 + 30k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.