H24-T1-A2

Sei G eine Gruppe der Ordnung 2024 ($= 2^3 \cdot 11 \cdot 23$). Zeigen Sie:

a) G hat einen Normalteiler H der Ordnung 23.

b) H operiert transitiv durch Konjugation auf den Untergruppen der Ordnung 11.

c) G hat einen Normalteiler N der Ordnung 253.

d) G ist auflösbar.

Lösung

a) Wir bemühen hierzu die Sylowsätze. Sei s_p die Anzahl der $p-$ Sylowgruppen zur Primzahl p. Nach dem 3. Sylowsatz gilt $s_2 3 \equiv 1 \bmod 23$, sowie $s_2 3 | 88$. Demnach gilt $s_2 3 \in \{1, 2, 4, 8, 11, 22, 44, 88\}$. Da auch $s_2 3 \equiv 1 \bmod 23$ gelten muss, folgt $s_2 3 = 1$ und demnach gibt es genau eine 23-Sylowgruppe P_{23}. Nach der Vorlesung gilt also, dass $P_{23} \lhd G$, also ein Normalteiler von G ist. Da $\#P_{23} = 23$ ist also ein Normalteiler der Ordnung 23 gefunden. Aus Konsistenzgründen, nennen wir P_{23} nun H - wie in der Angabe.

b) Wir definieren die Menge $\mathfrak{U}_{11}$ der Untergruppen von G mit der Ordnung 11. Der Angabe folgend betrachten wir die Operation

$$H \times \mathfrak{U}_{11} \to \mathfrak{U}_{11}, \quad (h, U) \mapsto hUh^{-1}.$$

Wir bemerken dazu, dass die Untergruppen der Ordnung 11, gerade die 11-Sylowgruppen von G sind. Da für alle $h \in H$ die Abbildung $\mathrm{conj}_g : U \to hUh^{-1}$ ein Gruppenisomorphismus ist, gilt $\#U = \#hUh^{-1}$. Deshalb ist die oben definierte Abbildung wohldefiniert. Zudem gilt $eUe^{-1} = U$ und $(hk)U(hk)^{-1} = h(kUk^{-1})h^{-1}$ und deshalb ist die obere Abbildung auch eine Gruppenoperation. Wir müssen noch zeigen, dass die oben definierte Gruppenoperation transitiv ist, dazu müssen wir ein $U \in \mathfrak{U}_{11}$ finden, sodass $\mathfrak{U}_{11} = HU$ (also die Bahn von U) gilt. Fixieren wir dazu ein $U \in \mathfrak{U}_{11}$. Wir müssen also zeigen, dass für ein beliebiges $U' \in \mathfrak{U}_{11}$ stets ein $h \in H$ existiert, sodass $hUh^{-1} = U'$ gilt. Hierzu bemühen wir wieder die Sylowsätze, es gilt $s_{11} | 2^3 \cdot 23$. Hieraus folgt $s_2 3 \in \{1, 2, 4, 8, 46, 92, 184\}$. Da zudem $s_{11} \equiv 1 \bmod 11$ gelten muss, bleibt nur $s_1 1 = 1$. Demnach ist $\mathfrak{U}_{11}$ eine einelementige Menge und somit die Operation transitiv.

c) $253 = 11 \cdot 23$. Da H ein Normalteiler mit 23 Elementen ist, und es genau eine 11-Sylowgruppe K gibt (nach b)), die demnach auch ein Normalteiler ist, jedoch mit 11 Elementen, betrachtet man die Untergruppe $H \cdot K$ (Untergruppe, da H, K Normalteiler sind). Wir berechenen nun $H \cap K$. Da $H \cap K$ eine Untergruppe von H ist, folgt mit dem Satz von Lagrange, dass $\#H \cap K | 23$, analog folgt $\#H \cap K | 11$ und demnach $\#H \cap K = 1$, also $H \cap K = \{e\}$. Bekanntlich (sonst nochmal zeigen!) gilt dann also $H \cdot K \cong H \times K$, demnach hat $H \cdot K$ 253 Elementen. Wir zeigen nun noch, dass

$H \cdot K$ ein Normalteiler von G ist. Dazu sei $x \in H \cdot K$ beliebig, also $x = hk$ mit $h \in H$ und $k \in K$. Es gilt dann für $g \in G$ beliebig:

$$ghkg^{-1} = gh(g^{-1}g)kg^{-1} = (ghg^{-1})(gkg^{-1}) \in H \cdot K,$$

da H, K Normalteiler sind. Wir nennen $\times K$ nun N.

c) Da $H \cdot K \cong H \times K$ und sowohl H als auch K abelsch sind (da zyklisch, da Primzahlordnung) ist $H \cdot K = N$ abelsch und demnach auflösbar. G/N hat genau 8 Elementen. Zeigen wir nun, dass Gruppen mit 8 Elementen auflösbar sind, so wäre G schließlich auch auflösbar. Sei also L eine Gruppe mit 8 Elementen. Wir betrachten die Gruppenoperation (bekannt, dass das eine ist)

$$L \times L \to L, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta\alpha^{-1}.$$

Diese induziert eine Gruppenhomomorphismus $\phi : L \to S(8)$. Es ist bekannterweise $\ker(\phi)$ ein Normalteiler. Sei $\ker(\phi) = L$, dann gilt $\alpha\beta = \beta\alpha$ für alle $\alpha, \beta \in L$ und demnach wäre L abelsch und somit auflöbar. Ist $\ker(\phi) = \{e\}$, dann ist ϕ injektiv. Da L jedoch eine 2-Gruppe ist, so gilt $Z(L)$ ist nicht trivial. Demnach ist auch dieser Fall nicht möglich. L hat also einen nicht-trivialen Normalteiler N, also der Ordnung 2 oder 4. Also ist L/N eine Gruppe mit 4 oder 2 Elementen und somit abelsch. Also sind N und L/N abelsche und demnach auflösbare Gruppen und somit ist L auflösbar. Das zeigt die Behauptung.