

## H16-T3-A4

Finden Sie zwei Polynome  $f, g \in \mathbb{Q}[X]$  gleichen Grades, so dass  $\text{Gal}(f)$  und  $\text{Gal}(g)$  gleich viele Elemente haben, aber  $\text{Gal}(f)$  abelsch und  $\text{Gal}(g)$  nicht abelsch ist.

*Lösungsvorschlag.* Wähle  $f = \phi_7(X) = X^6 + X^5 + \dots + X + 1$  und  $g = (X^3 - 2)(X - 1)(X - 2)(X - 3)$  (die drei rechten Faktoren verändern die Galoisgruppe nicht und dienen lediglich dazu, den Grad anzupassen - da generell die Galoisgruppe eines Polynomes nur für separable Polynome definiert wird, haben wir verschiedene Linearfaktoren ergänzt). Dann ist  $\deg(f) = 6 = \deg(g)$  und  $\text{Gal}(f) \simeq \mathbb{Z}_7^\times$  abelsch, und  $\text{Gal}(g) = \text{Gal}(X^3 - 2) \simeq S_3$  nicht abelsch (z.B. da  $\deg(X^3 - 2) = 3$  prim ist und  $X^3 - 2$  genau zwei echt komplexe Nullstellen besitzt, oder nach Berechnung der Diskriminante  $\Delta(X^3 - 2) = -27 \cdot 2^2 = 108$ , die damit kein Quadrat in  $\mathbb{Q}$  ist, vgl. Übung "Galoistheorie II") sowie  $|\text{Gal}(f)| = 6 = |\text{Gal}(g)|$  wie gewünscht.