



Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-
Technische Fakultät

FP 16: Quantisierte Leitfähigkeit in 1-D Drähten

Fortgeschrittenenpraktikum Teil A

Entstanden aus einer Zulassungsarbeit zur Ersten Staatsprüfung
(erstellt von Michael Irrgang, betreut von Prof. Dr. Achim Wixforth)

Version vom 29.09.2015, Dr. Andreas Hörner

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis.....	IV
1 Einleitung.....	1
2 Die Natur der Quantenphysik	2
2.1 Die Plancksche Quantenhypothese	2
2.2 Quantenmechanik	4
2.2.1 Welle-Teilchen-Dualismus	5
2.3 Welle-Teilchen-Dualismus im Versuch.....	11
2.4 Elektronen im Festkörper	14
2.5 Quanten-Hall-Effekt (QHE).....	16
2.6 Welle, Teilchen oder etwas ganz anderes.....	20
3 Quantisierte Leitfähigkeit in 1-D Drähten.....	22
3.1 Versuchsaufbau	22
3.2 Versuchsdurchführung	22
3.3 Auftreten von gequantelte Werten für den Leitwert	23
4 Versuchsanleitung FP 16	24
4.1 Einleitung:	24
4.2 Theoretische Überlegungen:	24
4.3 Aufbau und Funktionsweise:	29
4.4 Durchführung:	30
4.5 Auswertung:	30
5 Literaturverzeichnis	31

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Welle trifft auf Einfachspalt	5
Abbildung 2: Welle trifft auf Doppelspalt.....	6
Abbildung 3: Makroskopische Teilchen treffen auf Einfachspalt.....	6
Abbildung 4: Makroskopische Teilchen treffen auf Doppelspalt	7
Abbildung 5: Elektronen treffen auf Einfachspalt.....	7
Abbildung 6: Elektron trifft auf Doppelspalt	8
Abbildung 7: Elektron trifft auf Doppelspalt unter Beobachtung	8
Abbildung 8: Wellen im Kastenpotential	12
Abbildung 9: Hall Effekt	16
Abbildung 10: Bild der Spannungsstufen	23
Abbildung 11: Darstellung der Wellenfunktion eines Elektrons im Kastenpotential.....	26

"Die Quantenmechanik ist sehr achtunggebietend. Aber eine innere Stimme sagt mir, dass das noch nicht der wahre Jakob ist. Die Theorie liefert viel, aber dem Geheimnis des Alten bringt sie uns kaum näher. Jedenfalls bin ich überzeugt, dass der Alte nicht würfelt."

(Albert Einstein 1926)

1 Einleitung

Basierend auf dem Artikel „Tabel-top quantum theory“, welcher am 28. Oktober 1995 in der Zeitschrift „The Economist“ erschienen ist, soll das wesentliche Prinzip der Quantenphysik dargestellt werden. In diesem Artikel wird ein Versuch vorgestellt, mit dem es unter Verwendung von zwei Stromkabeln und einem vergleichsweise einfachen Aufbau möglich ist, diskrete und eindeutige Messwerte zu erhalten. Veranschaulicht wird das, was an den Kontaktstellen zwischen den Kabeln passiert, mit dem Bild von Käsefäden beim Auseinanderziehen zweier Pizzastücke. Dies ist natürlich ein stark vereinfachtes Bild, welches hier verwendet wird. Bei den Käsefäden handelt es sich in der Realität um Nanodrähte mit einem Durchmesser im Ångströmbereich. Diese geringe Ausdehnung führt nachweislich zu quantisierten Messwerten der Leitfähigkeit.

Im Artikel wird Dr. Costa-Krämer von der Universität Madrid dahingehend zitiert, dass dieses Phänomen einen guten und einfachen Weg darstellt, um die Realität der Quantentheorie Schülern näherzubringen. Darauf aufbauend, soll diese Arbeit einen detaillierten Einblick in die Quantenphysik und dem der quantisierten Leitfähigkeit zugrunde liegenden Entdeckung des Quanten-Hall-Effekts geben. Dies ist daher wichtig, da im vorliegenden Versuch Elektronen sowohl als Teilchen wie auch als Welle beschrieben werden und der Quanten-Hall-Effekt zur Definition des Standards des elektrischen Widerstandes R_K verwendet wird. Darüber hinaus wird die Verwendung dieses Versuchs für den schulischen Bereich, genauer in der 10. Klasse des achtstufigen Gymnasiums, aufgearbeitet.

2 Die Natur der Quantenphysik

Die Quantentheorie, genauer die Plancksche Quantenhypothese aus dem Jahr 1900, war neben Einsteins Relativitätstheorie eine der beiden gänzlich neuen Ideen, welche die Physik zu Beginn des 20. Jahrhunderts revolutionierten. Planks Überlegungen waren lange Zeit umstritten und wurden auch von Einstein angezweifelt. Somit ist auch zu verstehen, weshalb es beinahe drei Jahrzehnte dauerte, bis es den Physikern Heisenberg und Schrödinger gelungen ist, die Quantentheorie zur Theorie der Quantenphysik weiterzuentwickeln, welche heute zur Erklärung der Physik von Materie eingesetzt wird und verifizierbare Ergebnisse liefert (Tipler, 2010. S.145ff). Diese Beschreibung der Quantenphysik wird sich zum Großteil auf Elektronen beschränken, da diese für die im Versuch beobachteten Phänomene verantwortlich sind.

2.1 Die Plancksche Quantenhypothese

Den Ursprung hat die Plancksche Quantenhypothese in den Problemen, welche die Wissenschaft um 1890 hatte. Diese Probleme beruhten darauf, dass es weder mit dem Verschiebungsgesetz nach Wien noch mit der Rayleigh-Jeans Theorie möglich war, die elektromagnetischen Spektren eines schwarzen Körpers zu erklären (Tipler, 2010. S.145ff).

Bei einem schwarzen Körper handelt es sich um einen Körper der sämtliche einfallende Strahlung absorbiert. Die von einem solchen Körper, emittierte Strahlung, welche auftritt, wenn er erwärmt wird, wird als die Strahlung schwarzer Körper bezeichnet. Ausgehend von dieser Annahme lassen sich in guter Näherung viele reale Körper beschreiben, wie zum Beispiel die Sonne. Das Maximum der Wellenlänge der von der Sonne ausgehenden Strahlung liegt im sichtbaren Bereich. Dieser Zusammenhang lässt sich mit dem Wienschen Verschiebungsgesetz folgendermaßen beschreiben:

$$\lambda_p T = 2,90 \cdot 10^{-3} mK$$

λ_p = Wellenlänge

T = Temperatur in Kelvin

Neben dem Verschiebungssatz existierte noch eine weitere Relation, welche den Zusammenhang zwischen Wellenlänge und Intensität beschreibt, das Rayleigh-Jeans Gesetz. Als jedoch experimentelle Daten vorlagen, stand die Physik im ausgehenden 19. Jahrhundert vor folgendem Problem:

Die Entstehung elektromagnetischer Wellen konnte mit den Theorien von Clerk Maxwell erklärt werden. Somit war bekannt, wie ein schwarzer Körper bei Erwärmung Strahlung emittiert. Die Vorhersagen über die Intensitäten bei kurzen Wellenlängen des Wienschen Verschiebungsgesetzes deckten sich sehr gut mit den Werten aus den Experimenten bei Untersuchungen der Schwarzkörperstrahlung. Für lange Wellenlängen lieferte das Rayleigh-Jeans Gesetz gute Ergebnisse. Beide Theorien konnten jedoch nicht in Einklang gebracht werden und somit existierte keine hinreichende Erklärung für auftretende Intensitäten über das gesamte Spektrum der elektromagnetischen Strahlung, welche bei schwarzen Körpern auftritt (Tipler, 2010. S.145ff).

Die Lösung für dieses Problem stellten Max Plancks empirische Forschungen auf diesem Gebiet dar. Ende 1900 schlug Planck folgende Formel vor,

$$u_{\lambda}(\lambda; T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

u_{λ} = Strahlungsenergie pro Volumen und Wellenlängenintervall, als Funktion der Wellenlänge und der Temperatur

π = Kreiszahl Pi

c = Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

k = Boltzmann Konstante

mit welcher die experimentell gewonnen Daten verifiziert werden konnten. Um dies zu erreichen, wurde von Planck die neue Konstante h (das Plancksche Wirkungsquantum) in seine Formel eingeführt. Den Wert für h ermittelte Planck in der Art, dass er die Ergebnisse seiner Formel den

experimentellen Werten anglich. Der Wert von h auf vier gültige Stellen gerundet lautet:

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{Js}$$

Im Weiteren versucht nun Planck seine Überlegungen auf eine theoretische Grundlage zu stellen. Dabei stellte er fest, dass es ihm möglich ist, seine Formel zu bestätigen, wenn er sich einer neuen und in physikalischen Kreisen nicht sonderlich anerkannten Idee bedient (Tipler, 2010. S.145ff).

Bis zu diesem Zeitpunkt ging man davon aus, dass die elektromagnetische Strahlung, welche von Körpern emittiert wird, als kontinuierliches Spektrum auftritt. Planck hingegen nutzte die Annahme, „*dass die Energie jeder molekularen Schwingung nur ein ganzzahliges Vielfaches von $h \cdot f$ sein kann*“ (Tipler, 2010. S.150ff; Nolting, 1992. S.6ff).

$$E = n * h * f$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

$f =$ Frequenz

$E =$ Energie

Die Annahme von diskreten Energien wird als Plancksche Quantenhypothese bezeichnet. Sie wurde zu Beginn jedoch wenig beachtet und selbst Planck sah in dieser Annahme nur ein mathematisches Hilfsmittel für seine Formel. Dies sollte sich erst mit den Versuchen zum photoelektrischen Effekt von Albert Einstein ändern, in denen die Quantelung von Energien experimentell bewiesen werden konnte und somit ein neuer „Forschungszweig“ entstand, die Quantenmechanik (Tipler, 2010. S.150ff; Nolting, 1992. S.6ff).

2.2 Quantenmechanik

Die Quantenmechanik lieferte die Möglichkeit, den Wellen-Teilchen-Dualismus in einer konsistenten Theorie zu erklären. Darüber hinaus konnte mit ihr die relative Häufigkeit der Spektrallinien und der Aufbau von Atomen und Molekülen erklärt werden. Auf Basis von Vorhersagen, welche die Quantenmechanik lieferte, wurde die Entwicklung einer Vielzahl von

praktischen Instrumenten möglich, wie zu Beispiel dem Magnetresonanztomograph oder der LED. Von besonderem Interesse für den Versuch ist das Verhalten von Elektronen, da sie sowohl als Welle als auch als Teilchen beschrieben werden können. Daher wird im nächsten Kapitel der Welle-Teilchen-Dualismus näher ausgeführt.

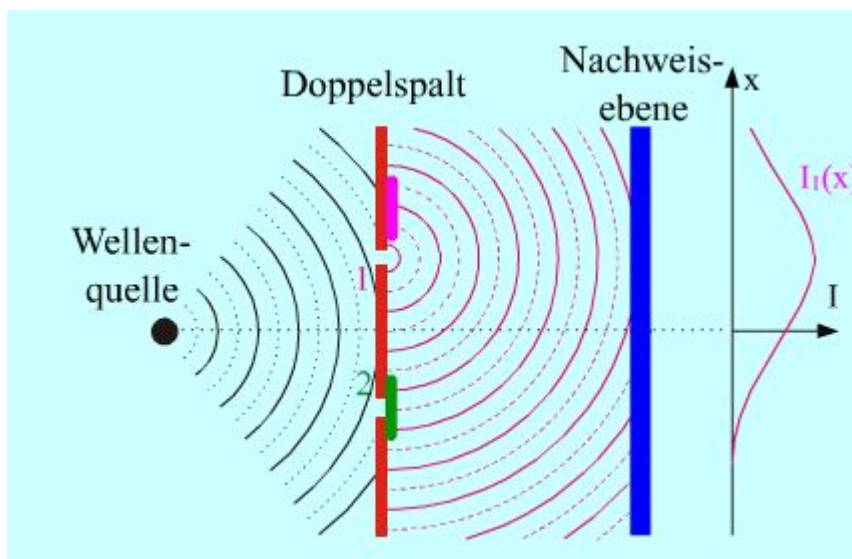
2.2.1 Welle-Teilchen-Dualismus

Unter dem Begriff Welle-Teilchen-Dualismus ist zu verstehen, dass Teilchen, wie etwa Elektronen, sowohl als massebehaftete Teilchen als auch als Welle beschrieben werden können. Dies wird eindrucksvoll bei Doppelspaltexperimenten gezeigt.

Zusammengefasst liefern diese Experimente folgende Ergebnisse:

Treffen makroskopische Wellen auf einen Einfachspalt, treten Beugungsmuster auf wie sie von Punktquellen zu erwarten sind. Dargestellt in Abbildung 1.

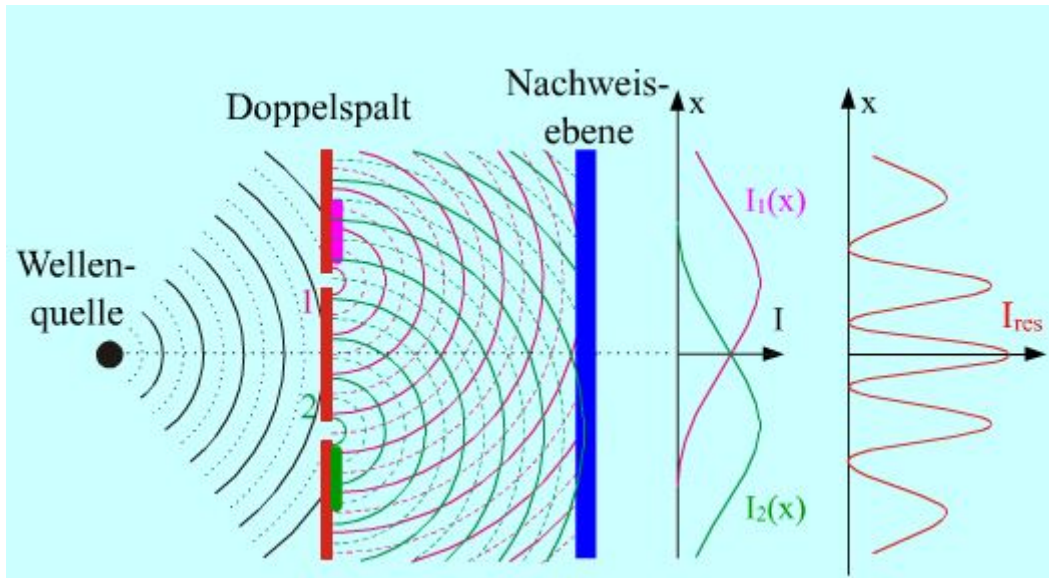
Abbildung 1: Welle trifft auf Einfachspalt



Quelle: leifiphysik.de

Treffen die gleichen Wellen auf einen Doppelspalt, kommt es zu Interferenz der Wellen, da die beiden Spalte, wie zwei Punktquellen zu betrachten sind. Somit bildet sich ein Beugungsmuster aus wie in Abbildung 2.

Abbildung 2: Welle trifft auf Doppelspalt

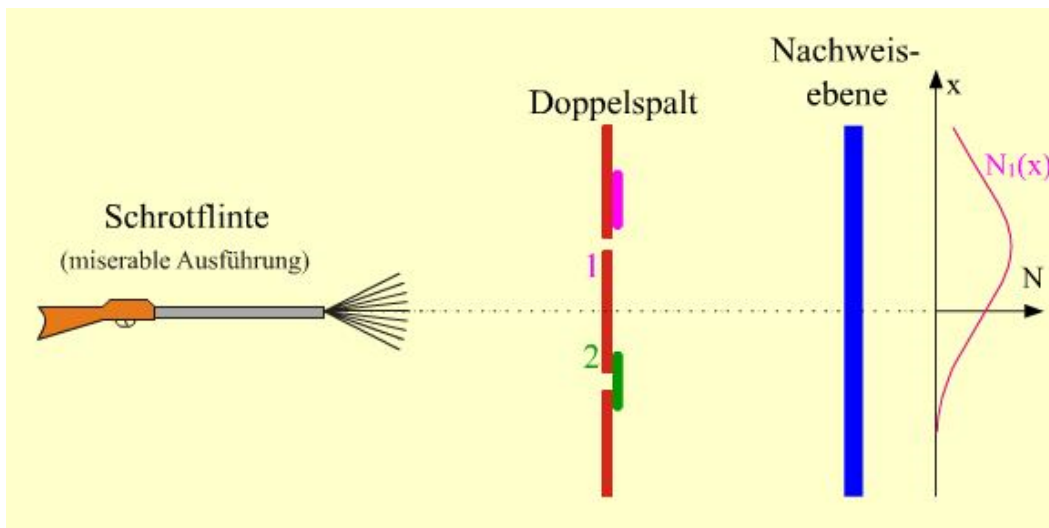


Quelle: leifiphysik.de

In Abbildung 2 ist zu erkennen, wie die Wellen wechselwirken und es dadurch zur Ausbildung von Beugungsmaxima und -minima kommt.

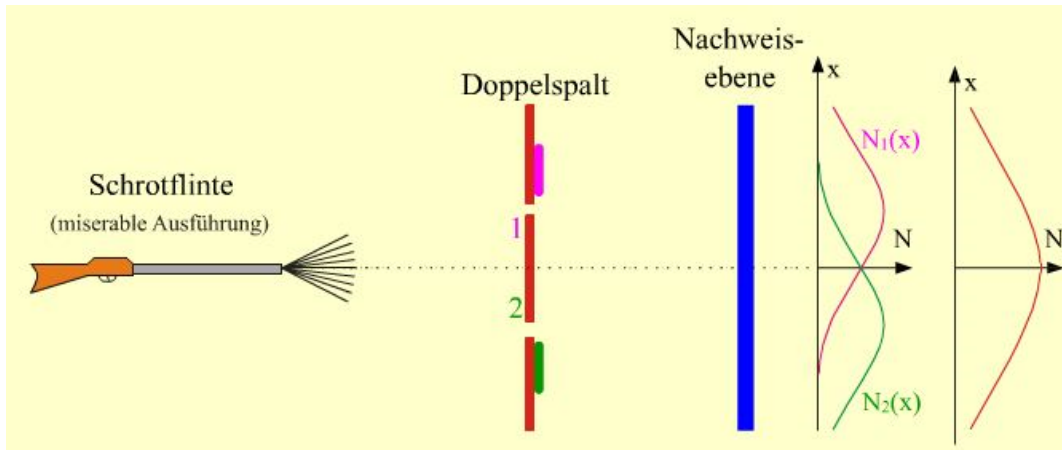
In den nächsten beiden Abbildungen ist dargestellt, wie sich makroskopische Teilchen (in diesem Fall Schrotkugeln) beim Auftreffen auf einen Einfach- oder Doppelspalt verhalten.

Abbildung 3: Makroskopische Teilchen treffen auf Einfachspalt



Quelle: leifiphysik.de

Abbildung 4: Makroskopische Teilchen treffen auf Doppelspalt

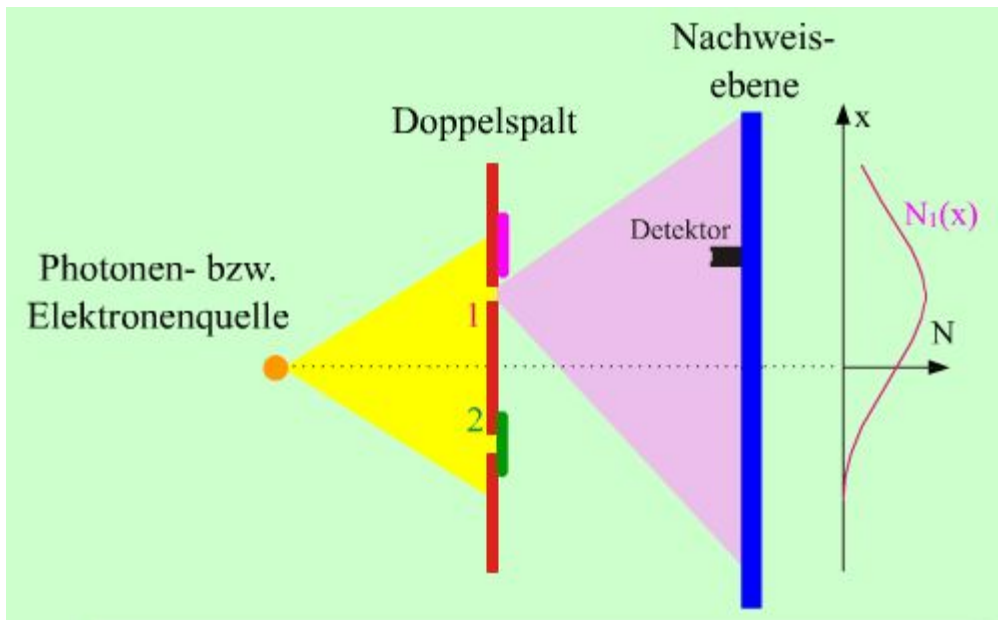


Quelle: leifiphysik.de

Hier ist nun zu erkennen, dass es zu keiner Interferenz kommt.

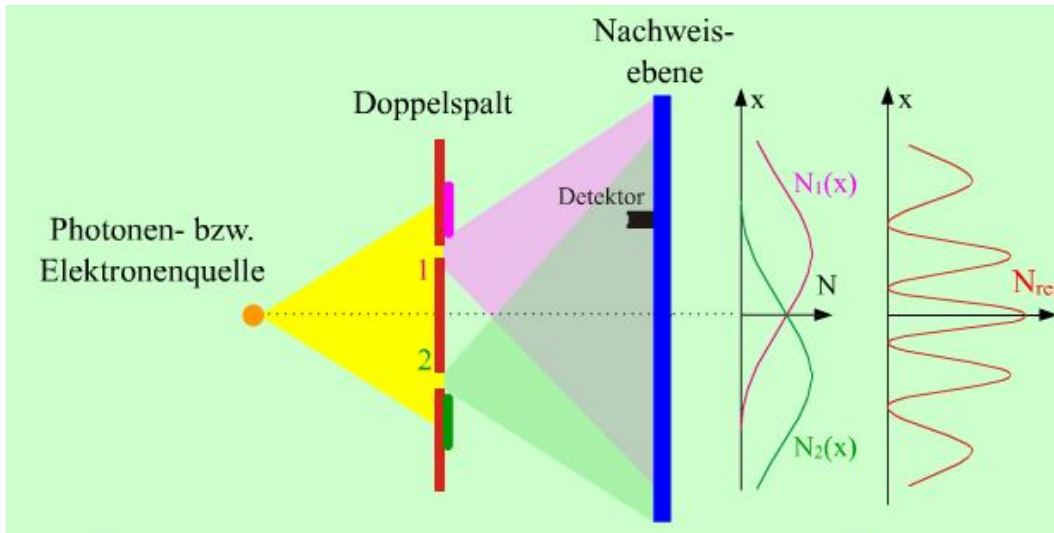
Bei Teilchen wie Elektronen würde man, da sie eine Masse und auch eine räumliche Ausdehnung besitzen, ein ähnliches Beugungsmuster wie bei den Schrotkugeln erwarten. Tatsächlich treten bei Elektronen, wie in den Abbildungen 4/5 zu sehen, vergleichbare Muster wie bei Wellen auf.

Abbildung 5: Elektronen treffen auf Einfachspalt



Quelle: leifiphysik.de

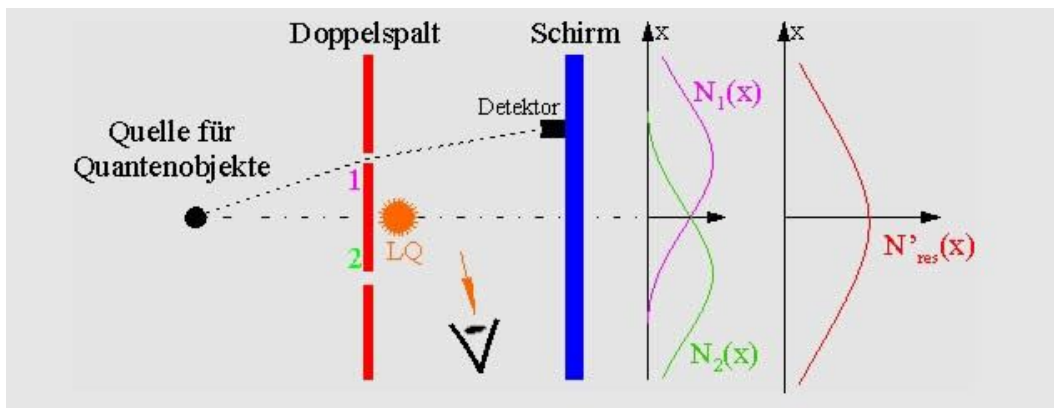
Abbildung 6: Elektron trifft auf Doppelspalt



Quelle: leifiphysik.de

Von besonderem Interesse ist jedoch das Verhalten der Elektronen, wenn sie auf einen Doppelspalt treffen, dabei allerdings beobachtet wird, durch welchen Spalt sie sich bewegen. Das dann auftretende Beugungsmuster ist in Abbildung 7 dargestellt.

Abbildung 7: Elektron trifft auf Doppelspalt unter Beobachtung



Quelle: leifiphysik.de

Bei dieser Versuchsanordnung treten nun wieder Beugungsmuster auf, wie sie von makroskopischen Teilchen erwartet werden (Tipler, 2010. S.145ff; Nolting, 1992. S.6ff).

Diese beschriebenen Experimente zeigen, dass quantenmechanische Teilchen sowohl die Eigenschaften von Teilchen als auch von Wellen haben können, was für die spätere Theorie des Experiments mit 1-Dimensionalen Drähten noch von Bedeutung sein wird.

Aus dem Doppelspalt-Experiment geht die Welleneigenschaft von einem Elektron hervor, eine genauere mathematische Beschreibung dieser Eigenschaft ist über die de-Broglie-Hypothese möglich.

De-Broglie formulierte zwei Aussagen, in denen er zum einen die Frequenz f in Zusammenhang mit der Energie E brachte und zum anderen die Wellenlänge (de-Broglie-Wellenlänge) von Materie als den Quotienten des Plankschen Wirkungsquantums h durch den Impuls p eines Teilchens beschrieb.

$$f = \frac{E}{h}$$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Für Photonen¹ ergeben sich diese Gleichungen direkt aus den Überlegungen Einsteins zur Quantelung der Strahlung. Für Teilchen mit einer Ruhemasse, welche ungleich Null ist, griff de-Broglie auf die Interpretation von gequantelten Drehimpulsen bei Elektronen in wasserstoffähnlichen Atomen zurück, welche von Bohr stammte. Bohr ging davon aus, dass sich die Bahn mit einem Radius r eines Elektrons in Abhängigkeit seiner Masse m , der Geschwindigkeit v und dem Plankschen Wirkungsquantum h beschreiben lässt; wobei auch hier wieder nur ganzzahlige Vielfache von h möglich sind.

$$r = \frac{nh}{2\pi mv}$$

Diese Überlegungen von Bohr wurden dahingehend erweitert, dass nur diejenigen Radien r zulässig sind, auf welchen sich eine stehende Welle bilden kann. Darunter ist zu verstehen nur die diskreten Werte von r sind möglich, welche einem ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge λ entsprechen, die dem Elektron zugeordnet werden kann.

¹ Bei Photonen handelt es sich um Teilchen ohne Masse, welches sich für die elektromagnetische Wechselwirkung verantwortlich zeigt. Es handelt sich daher um ein Eichboson (Wechselwirkungsteilchen).

$$r = \frac{nh}{p} = n\lambda$$

Die Ausführungen zu diskreten Werten für den Radius r werden in der späteren Betrachtung des Quanten-Hall-Effekts noch von Bedeutung sein, um das Auftreten diskreter Werte für den Hall-Widerstand zu erklären (Tipler, 2010. S.237ff; Nolting, 1997. S.6ff).

Neben der Beschreibung von Elektronen über die Relationen von de-Broglie, welche zwar den Wellencharakter von Elektronen berücksichtigt aber auf dem Atommodell von Bohr beruht, welcher von Teilchen ausgeht, existiert noch die Beschreibung von Schrödinger. Schrödinger beschreibt Elektronen mit Hilfe einer Wellenfunktion ψ , welche im Kapitel 2.3 dazu verwendet wird, die Elektronen und deren Verhalten im Versuch zu beschreiben. Die Schrödingergleichung hat ihren Ursprung in der Beschreibung der Gesamtenergie eines Systems. Die Gesamtenergie E eines Systems ergibt sich aus der Summe von kinetischer Energie $p^2/2m$ und der potentiellen Energie V .

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(r, t)$$

Ersetzt man nun im Folgenden unter Berücksichtigung Korrespondenz Prinzip nach Bohr die Größen für die klassische Physik durch ihre Entsprechungen in der Quantenphysik erhält man folgende Ortsdarstellung der Schrödingergleichung:

$$E \rightarrow \mathbb{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$p \rightarrow \mathbb{p} = i\hbar \nabla$$

$$r \rightarrow \mathbb{r} = r$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi$$

Wie in Kapitel 2.3 zu sehen sein wird, muss die Wellenfunktion dem jeweiligen Problem angepasst werden. Mit Hilfe des Betragsquadrats der Funktion $|\psi|^2$ lässt sich nun die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons ermitteln. Somit trägt die Schrödingergleichung der heisenbergschen Unschärferelation Rechnung, welche in Kapitel 2.4 näher ausgeführt wird. Somit ist aber der Übergang von einer deterministischen Beschreibung des Elektrons hin zu einer Beschreibung, welche auf Wahrscheinlichkeiten beruht, vollzogen. Dies wird bei der Beschreibung von Elektronen in einem Festkörper noch von Nutzen sein (Tipler, 2010. S.1323; Nolting, 1992. S.6ff).

2.3 Welle-Teilchen-Dualismus im Versuch

Im Versuch wird die geschilderte besondere Eigenschaft von Teilchen benötigt, um das Verhalten der Elektronen an der Kontaktstelle der beiden Drähte zu beschreiben.

Zu Beginn der Betrachtung soll keine äußere Kraft wirken, also keine Spannung angeschlossen sein. Des Weiteren helfen einige geometrische Vorüberlegungen, das Verhalten der Elektronen zu beschreiben.

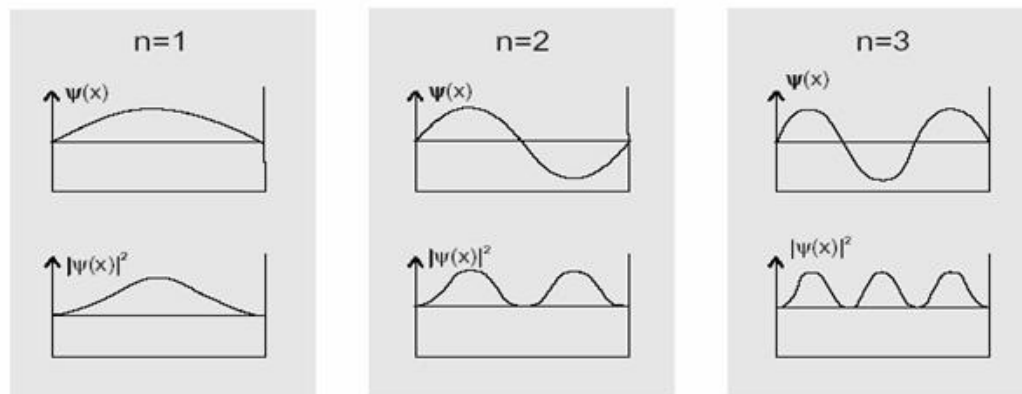
Wie bereits in der Einleitung beschrieben, ist für das Auftreten der erwarteten diskreten und eindeutigen Messwerte die Ausbildung von Nanodrähten an den Kontaktstellen verantwortlich.

Die Elektronen in diesen Nanodrähten sind für die zu erwartenden Messergebnisse verantwortlich. Daher muss deren Bewegung ausführlich beschrieben werden. Die Elektronen können sich zum einen in der Ebene des Durchmessers des Nanodrahtes bewegen, welche sehr eingeschränkt ist. Zum anderen ist eine Bewegung der Elektronen entlang der Längsachse des Nanodrahtes, welche kaum eingeschränkt ist, möglich. Somit erhalten wir zwei unterschiedliche theoretische Beschreibungen für die zwei Bewegungsrichtungen.

Für die Bewegung in der Querschnittsfläche können folgende Vereinfachungen angenommen werden. Da wären: da das Experiment bei Raumtemperatur durchgeführt wird, kann für die

Aufenthaltswahrscheinlichkeit außerhalb des Drahtes Null angenommen werden. Daher kann von einem Kastenpotential (vgl.: Abb.: 1) ausgegangen werden, in welchem sich die Elektronen bewegen. Des Weiteren kann ohne Beachtung der Allgemeinheit davon ausgegangen werden, dass es sich bei der Querschnittsfläche um einen Kreis handelt und daher die Betrachtung einer beliebigen Richtung, für alle anderen Richtungen als Gleichwertig anzusehen ist. Die ausgewählte Richtung wird im Folgenden als x-Richtung bezeichnet, deren Nullpunkt auf dem Rand des Nanodrahtes liegt. Daraus ergeben sich für die Wellenfunktion, mit welcher das Elektron beschreiben wird, folgende Randbedingungen:

Abbildung 8: Wellen im Kastenpotential



Quelle: Leify Physik

Am Rand muss die Wellenfunktion gleich null sein. Wenn sie ungleich null wäre, ergäbe sich daraus eine Aufenthaltswahrscheinlichkeit für die Elektronen außerhalb des Drahtes, was bereits ausgeschlossen wurde. Somit gilt für den ortsabhängigen Teil der Wellenfunktion:

$$\psi = A \cdot \sin(k_x \cdot x)$$

Wenn der Draht eine Länge von L_x besitzt gilt:

$$\psi(0) = \psi(L_x) = 0$$

Daraus ergeben sich für den Wellenvektor in x-Richtung k_x folgende Lösungen:

$$k_{xn} = \frac{n\pi}{L_x}$$

Damit gilt für die Wellenfunktion:

$$\Psi = A \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L_x} \cdot x\right)$$

Neben der Beschreibung des Elektrons als Welle kann ein Elektron auch als Teilchen aufgefasst werden. Somit kann über die Beziehung:

$$p_{xn} = \hbar k_{xn}$$

einem Teilchen ein Impuls in Abhängigkeit des Wellenvektors k_{xn} zugeordnet werden.

Aus der Energie-Impuls-Beziehung ergibt sich folgende Formel für die Energie:

$$E_{xn} = \frac{p^2 n}{2m} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m L_x^2}$$

Bei Betrachtung der Formel für die Energie fällt auf, dass die Größe L , also die Dicke des Drahtes quadratisch und reziprok in die Energie eingeht. Daraus folgt, je kleiner der Durchmesser des Drahtes, desto größer wird die Energiedifferenz der aufeinander folgenden Energieniveaus sein.

Für die zweite Bewegungsrichtung der Elektronen (entlang des Fadens) können Längen L_z von bis zu 1/10mm auftreten. Hinzu kommt noch auf beiden Seiten die Ausdehnung des makroskopischen Drahtes im mm-Bereich. Setzt man diese Werte L_z nun in die Formel für die Energie ein, erhält man ebenfalls die Werte für die Energieaufspaltung, diese sind aber um den Faktor $(L_x/L_z)^2$, also um 10^8 bis 10^{10} kleiner. Diese Energieaufspaltungen sind mit dem gewählten Aufbau nicht mehr beobachtbar. Somit können die Elektronen in L_z -Richtung aufgrund der sehr kleinen Energieniveaus wie klassische Teilchen mit einer parabolischen Energie-Impuls-Beziehung behandelt werden. Wohingegen für die L_x -Richtung von einem quantenphysikalischen Teilchen, welches in einem Potentialtopf eingeschlossen ist, ausgegangen werden muss (Tipler, 2010. S.1323ff; Nolting, 1997. S.6ff).

2.4 Elektronen im Festkörper

In den Kapiteln 2.2.1 und 2.3 wurde das Verhalten von Elektronen als quantenmechanische Teilchen beschrieben und an Hand der Schrödingergleichung dargelegt, wie sich die diskreten Energieniveaus berechnen lassen. In diesem Kapitel soll nun darauf eingegangen werden, wie es überhaupt zur Ausbildung der einzelnen Energieniveaus an den Kontakten der Drähte kommen kann.

Um dies näher zu betrachten ist ein Exkurs in die Festkörperphysik nötig:

Bei Elektronen in Festkörpern wird zwischen lokalisierten und delokalisierten Elektronen unterschieden. Unter lokalisierten Elektronen sind die Elektronen zu verstehen, welche sich in den inneren Schalen aber auch zum Teil in den Valenzschalen befinden und damit fest einem Atom zugeordnet sind. Bei Elektronen, die sich annähernd frei in einem Festkörper bewegen können, spricht man von delokalisierten Elektronen. Diese annähernd freie Bewegung lässt sich wieder mit der Schrödingergleichung aus Kapitel 2.2.1 begründen. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Elektrons wird über die Summe aus kinetischer und potentieller Energie bestimmt. Daraus folgt für die Elektronen im Festkörper, dass je weiter sie vom Atomkern und somit von Potential entfernt sind, umso schwächer ihre Bindung an den Atomkern ist. Daraus folgt wiederum ein größerer Bereich für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Darüber hinaus ist dieses Verhalten auch durch die Heisenbergsche Unschärferelation begründet.

Bei der Heisenbergschen Unschärferelation handelt es sich um eine der grundlegenden Aussagen der Kopenhagener Deutung zur Quantenmechanik. Sie beschreibt, dass zwei zueinander komplementäre Eigenschaften eines Teilchens nicht gleichzeitig beliebig genau bestimmt werden können. Für dieses Experiment ist folgende Relation von Bedeutung:

$$\Delta x \Delta p \sim h$$

Aus dieser direkten Proportionalität geht hervor, dass je genauer der Ort x bestimmt werden soll, umso ungenauer der Impuls p des Teilchens wird. Daher liefert diese Unschärfe-Relation die Begründung dafür, dass es überhaupt möglich ist, die Elektronen mittels einer Wellenfunktion zu beschreiben und somit auch die Möglichkeit, die Vereinfachung des Kastenpotentials anzunehmen (Tipler, 2010. S.237ff; Nolting, 1997. S.6ff).

Bisher wurde das Verhalten der Elektronen nur mittels der Schrödingergleichung für den Fall beschrieben, dass keine Spannung anliegt. Beim Versuch wird allerdings eine Spannung angelegt, um über den Spannungsverlauf, welcher am Oszilloskop aufgezeichnet wird, Rückschlüsse auf die gequantelten Werte des Widerstandes ziehen zu können. Bei einer angelegten Spannung verändert sich die Schrödingergleichung dahingehend, dass nicht mehr wie in Kapitel 2.3 als Lösung für die Schrödingergleichung eine Wellenfunktion der Form $\psi = A \sin(\omega, t) B \cos(\omega, t)$ gewählt werden kann. Im Folgenden wird nun ein Potential V größer null angelegt. Auch für diesen Fall würde die Schrödingergleichung diskrete Lösungen ergeben. Allerdings liefert hierfür die Festkörper Physik ein sehr viel geeigneteres Hilfsmittel. Hierbei werden nicht mehr Aufenthaltswahrscheinlichkeiten betrachtet, sondern die Elektronen auf Bänder verteilt, je nach ihrer Energie und streng nach dem Pauli-Prinzip. Die Ausbildung dieser Bandstruktur ist eng mit den Lösungen der Schrödingergleichung verbunden. Ausgehend vom Orbitalmodell ergeben sich für jedes Elektron spezielle Lösungen der Schrödingergleichung. Überlappen nun unterschiedliche Orbitale von verschiedenen Atomen, verschieben sich die Energieniveaus der einzelnen Elektronen nach oben und unten, man spricht hierbei von einer Aufspaltung der Niveaus. Bei der Betrachtung vieler Atome liefert die Schrödingergleichung zwar immer noch diskrete Lösungen für jedes Elektron, aber die Niveaus liegen so nahe beieinander, dass sie zu Bändern zusammengefasst werden können. Je näher die Energiebänder am ionisierten Atomrumpf liegen, umso stärker ist die Bindung der Elektronen. Je höher die Energiebänder sind, umso leichter können die Elektronen den Coulomb-Wall überwinden (durchtunnele), und tragen somit zur

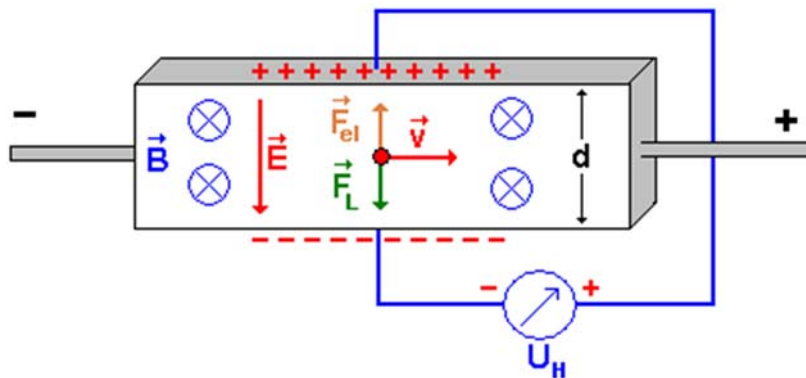
Stromleitung bei. Bei Metallen wird dieses Band, welches zur Stromleitung beiträgt, Leitungsband genannt.

Wird nun im Folgenden an diese Potential angelegt, verschieben sich die Bänder. Genauer die Energielücke zwischen dem Letzten gefüllten Band und dem Leitungsband wird geringer. Dies hat zur Folge, dass mehr Elektronen für die Stromleitung zur Verfügung stehen (Hunklinger, 2009. S.261ff)

2.5 Quanten-Hall-Effekt (QHE)

Beim klassischen Hall-Effekt wird, wie in Abbildung 9 zu sehen, die Hallspannung U_H gemessen. Hierfür wird elektrischer Strom durch eine Platte geleitet, welche von einem Magnetfeld durchsetzt ist. Aufgrund der Lorentzkraft erfahren die Ladungsträger im Magnetfeld eine Ablenkung und es kommt zu einer Ladungsverschiebung. Aufgrund dieser Verschiebung kann an den Außenflächen der Platte, an denen sich die Ladungsverschiebung, wie in Abbildung 9 zu erkennen, ausbildet, die Hallspannung gemessen werden.

Abbildung 9: Hall Effekt



Quelle: Grüninger, (2014). Lbs-BW

Die Hallspannung lässt sich, ausgehend von der Lorentzkraft, wie folgt bestimmen:

Die Lorentzkraft F_L beschreibt die Kraft, welche von einem magnetischen Feld auf ein geladenes, sich in Bewegung befindendes Teilchen ausgeübt wird.

$$\vec{F}_L = e\vec{v} \times \vec{B}$$

Die Richtung der Kraft ergibt sich aus dem Kreuzprodukt der Geschwindigkeit v mit der magnetischen Flussdichte B . Die magnetische Flussdichte beschreibt die Stärke des Magnetfeldes.

Wie in Abbildung 9 zu erkennen, ist kommt es aufgrund der Lorentzkraft zu einer Ladungstrennung. Die Elektronen werden nach unten abgelenkt, was die Ausbildung eines elektrischen Feldes zur Folge hat. Die Elektronen können jedoch nur soweit abgelenkt werden, bis die elektrische Kraft F_{el} , resultierend aus dem elektrischen Feld, genau so groß ist wie die Lorentzkraft. Daher gilt:

$$\vec{F}_{el} = \vec{F}_L$$

Daraus folgt nach Einsetzen der beiden Kräfte, dem Kürzen Elementarladung e und Umstellen auf null:

$$0 = (\vec{E} - \vec{v} \times \vec{B})$$

Wird das Koordinatensystem so gewählt, dass sich die Ladungsträger in x -Richtung bewegen und das Magnetfeld in z -Richtung zeigt, ergibt sich folgende Vereinfachung:

$$0 = E_y - v_x B_z$$

Die Geschwindigkeit der Ladungsträger lässt sich mittels der Stromdichte j ausdrücken:

$$\vec{j} = ne\vec{v}$$

wobei das n in dieser Formel für die Anzahl der Ladungsträger steht. Wird diese Formel nun auf v umgestellt und eingesetzt, ergibt sich daraus folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{1}{nq} j_x B_z \\ &= A_H j_x B_z \end{aligned}$$

Die so hergeleitete Formel gibt den Zusammenhang zwischen dem elektrischen Feld E , der Hall-Konstanten A_H , der Stromdichte j und dem magnetischen Feld B an. Diese Formel enthält allerdings noch Größen, welche relativ schwer zu messen sind. Unter Verwendung der Annahme, dass es möglich ist, das elektrische Feld, welches sich ausbildet, wie in einem Plattenkondensator zu betrachten, lässt sich das elektrische Feld E durch den Quotient der Hallspannung U_H und der Größe d (vgl.: Abbildung 9) darstellen. Darüber hinaus ist es noch möglich, die Stromdichte j über den Quotienten der Stromstärke I und der Querschnittsfläche $d \cdot b$ des Quaders aus Abbildung 9 auszudrücken. Durch diese beiden Vereinfachungen ergibt sich die Formel:

$$U_H = A_H \frac{IB_z}{b}$$

Somit ist die Hallspannung U_H nur noch von gut messbaren Größen abhängig. Aus dieser Formulierung lässt sich nun der Hall-Widerstand angeben:

$$R(B) = A_H \frac{B}{b}$$

Der Hall-Widerstand ist jedoch nicht äquivalent mit dem tatsächlichen Widerstand, wie er zum Beispiel, für den in Abbildung 9 zusehenden Quader gemessen werden könnte, sondern gibt viel mehr das Verhältnis zwischen Hall-Spannung und Strom bei gegebener magnetischer Flussdichte an.

$$R(B) = \frac{U_H}{I}$$

1980 wurden von Klaus v. Klitzing der Hall-Effekt an quasi 2-Dimensionalen Elektronenschichten unter der Verwendung starker Magnetfelder und sehr niedrigen Temperaturen untersucht. Er entdeckte, dass der Anstieg von U_H nicht linear ist, sondern Plateaus enthält. Klitzing schloss daraus, dass die

Hall-Spannung, genauer gesagt der Hall-Widerstand, gequantelt ist und daher nur Werte der Art

$$R_H = \frac{U_H}{I} = \frac{R_K}{n}$$

annehmen kann. Wobei R_K , die Klitzing-Konstante, sich aus dem Quotienten der beiden fundamentalen Größen des Plankschen Wirkungsquantums h und dem Quadrat der Elementarladung e ergibt.

$$R_K = \frac{h}{e^2}$$

Die Werte für n können nach Klitzing nur positive ganze Zahlen sein ($n=1,2,3,\dots$).

Erklärt wird das Auftreten der gequantelten Zustände dadurch, dass die Elektronen durch die Lorentzkraft auf eine Kreisbahn gezwungen werden. Nach dem Pauli-Prinzip dürfen diese Bahnen nicht überlappen und sie dürfen nur Radien annehmen, welche dem ganzzahligen Vielfachen der de-Broglie-Wellenlänge entsprechen. Bewegt sich nun ein Elektron auf einer Kreisbahn mit erlaubtem Radius und es wird das Magnetfeld verstärkt, führt dies dazu, dass das Elektron auf eine Kreisbahn mit kleinerem erlaubtem Radius gezwungen wird. Dieser Übergang muss simultan zur Erhöhung des Magnetfeldes auftreten. Somit wird ein erlaubter Zustand für ein weiteres Elektron frei. Dadurch bewegen sich immer mehr Elektronen auf erlaubten Bahnen, was die Ladungsträgerdichte erhöht. Infolge dessen erhöht sich nun auch die mittlere Stoßzeit, was eine Erhöhung des Widerstandes zur Folge hat. Da der Widerstand in direktem Zusammenhang mit den Bahnradien steht und diese nur diskrete Werte annehmen können, folgt daraus, dass auch der Hall-Widerstand gequantelt sein muss.

Exkurs: Der fraktionelle-Quanten-Hall-Effekt

Die beiden Physiker Tsui und Störmer entdeckten 1982 bei der Untersuchung des Quanten-Hall-Effekts an ultrareinen Halbleitern diskrete Werte für n in der Form von rationalen Brüchen. Das Auftreten dieser Werte ist auf die Wechselwirkung der Elektronen untereinander zurück zu führen².

Im gesamten zweiten Kapitel wurde ein Einblick in die Entwicklung der Quantenhypothese aber auch in die Physik gegeben, welche dem Quanten-Hall-Effekt zugrunde liegt. Hierbei wurden eine Vielzahl von Modellen und theoretischen Annahmen wie etwa das Bohrsche Atommodell oder die Lichtquantenhypothese von Einstein, verwendet. Einige Modelle gehen von den Teilcheneigenschaften des Elektrons, andere von den Welleneigenschaften aus. Dennoch werden beide Annahmen auch wenn sie zum Teil der klassischen Physik entstammen, dazu verwendet, um letztendlich ein quantenphysikalisches Phänomen zu beschreiben. Genau dies stellt die Verbindung zum nächsten großen Kapitel dar, den Umgang des Physikunterrichts mit der Quantenphysik und den Problemen, welche Schüler mit diesem Thema haben können. Bevor jedoch im Kapitel 4 die Einbindung des Versuchs in den Schulunterricht näher dargestellt werden soll, wird in einem abschließenden Punkt noch einmal der Welle-Teilchen-Dualismus aufgegriffen und ein aktueller Forschungsstand zu diesem Thema dargestellt (Hunklinger, 2009. S.368ff; Ezawa, 2008. S.xi-xxiv; Tipler, 2009. S.1034ff).

2.6 Welle, Teilchen oder etwas ganz anderes

In diesem Punkt soll mit einer häufigen Fehlvorstellung aufgeräumt werden, welche nicht nur bei Schüler, sondern sich auch bei Physikstudenten immer wieder zeigt. Hierbei handelt es sich um die Annahme, dass es sich bei

² Das Auftreten dieser besonderen diskreten Werte soll im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht näher behandelt werden und wurde nur aus Gründen der Vollständigkeit erwähnt.

Elektronen entweder um Teilchen oder um Wellen handelt, je nachdem ob sie, wie zum Beispiel beim Doppelspalt-Experiment beobachtet, werden oder nicht. Dies ist so nicht richtig. Elektronen zeigen nur die Eigenschaften von Teilchen oder Wellen. Vielmehr zeigt das Gedankenexperiment von Einstein, Podolsky und Rosen, mit dem ursprünglich schwächen der Quantenphysik bewiesen werden sollten, dass gerade bei der Betrachtung von verschränkten Quantenzustände Phänomene auftreten, welche mit einer deterministischen Vorstellung nicht mehr erklärbar sind. Bei verschränkten Quantenzuständen handelt es sich um korrelierende Eigenschaften von mehr-Teilchen-Systemen, wie zum Beispiel den Spin eines Teilchens. Misst man bei einem Teilchen am Ort A den Spin, so ist bei einem anderen Teilchen, welches sich am Ort B befindet, unmittelbar ein negativer Spin zu messen. Von besonderer Bedeutung ist hier der Begriff „unmittelbar“. Also auch bei räumlicher Trennung scheinen die Systeme miteinander zu kommunizieren. Dies würde allerdings der Relativitätstheorie und dem No-Cloning-Theorem widersprechen. Dennoch kommt es zu einer Wechselwirkung, welche momentan mit der Quantenteleportation erklärt wird (Kircher. 2002, S.129ff). Dieser kleine Ausflug in die aktuelle Forschung zum Thema Quantencomputern soll aufzeigen, dass es sich bei Quantenteilchen nicht entweder um Wellen oder Teilchen handelt, sondern viel mehr um etwas ganz anderes, was mit unserem heutigen Wissen über die Quantenphysik noch nicht vollständig zu erklären ist.

3 Quantisierte Leitfähigkeit in 1-D Drähten

In diesem Kapitel soll nun der Versuch dargelegt werden. Wie eingangs beschrieben, dient dieser Versuch dazu, mittels eines einfachen Aufbaues, die Quantisierung einer vermeintlich kontinuierlichen Größe darzustellen.

Im Kapitel über den Versuchsaufbau wird der Aufbau des Versuchs FP 16 des Fortgeschrittenen-Praktikums der Universität Augsburg dargelegt. Es wird jedoch in Anmerkungen auf einen einfacheren Aufbau für den schulischen Einsatz eingegangen.

3.1 Versuchsaufbau

Für den Versuchsaufbau wird ein hochauflösendes Oszilloskop [Oszi] benötigt. Es sollte eine zeitliche Auflösung im Nanosekunden-Bereich besitzen. Darüber hinaus ist das verwendete Oszi noch an einen Computer angeschlossen, da dies für die Auswertung des FP 16 notwendig ist. Im schulischen Bereich ist dies nicht erforderlich. Der Versuchsaufbau erfolgt dann wie in Anhang 1 dargestellt. Um die beiden Drähte in Schwingung zu versetzen, damit ein Abreißen des Kontaktes auftritt, wird für den FP 16 ein Lautsprecher verwendet, wie in Anhang 1 zu sehen, welcher mittels eines Funktionsgenerators mit einer gepulsten 5 Volt Spannung betrieben wird. Als Alternativen für den Lautsprecher ist es nach der vorliegenden Literatur auch ausreichend die beiden Drähte mittels einer „Dritten Hand“ ausreichend nahe aneinander zu bringen und dann die Schwingung mittels Klopfen auf den Tisch zu erzeugen.

Bei der in Anhang 1 zu sehenden Schaltung handelt es sich um einen einfachen Stromkreis. Als Ein- und Ausschalter fungieren die beiden Drähte. Als Spannungsquelle wird eine 1,5 Volt Batterie verwendet und über den 500 Ohm Widerstand wird das Signal für das Oszi abgegriffen.

3.2 Versuchsdurchführung

Durch die gepulste Spannung am Lautsprecher wird der Stromkreis immer wieder geschlossen und geöffnet. Die im Stromkreis auftretenden Spannungen werden über das Oszi ausgelesen. Im Versuch FP 16 werden

die Werte über ein Lap-View Programm direkt ausgelesen. Das Ansteuern des Oszi auf die für den Versuch interessanten Werte erfolgt über den Trigger, welcher so eingestellt sein sollte, dass er immer beim Auftreten von Spannungsabbrüchen triggert³.

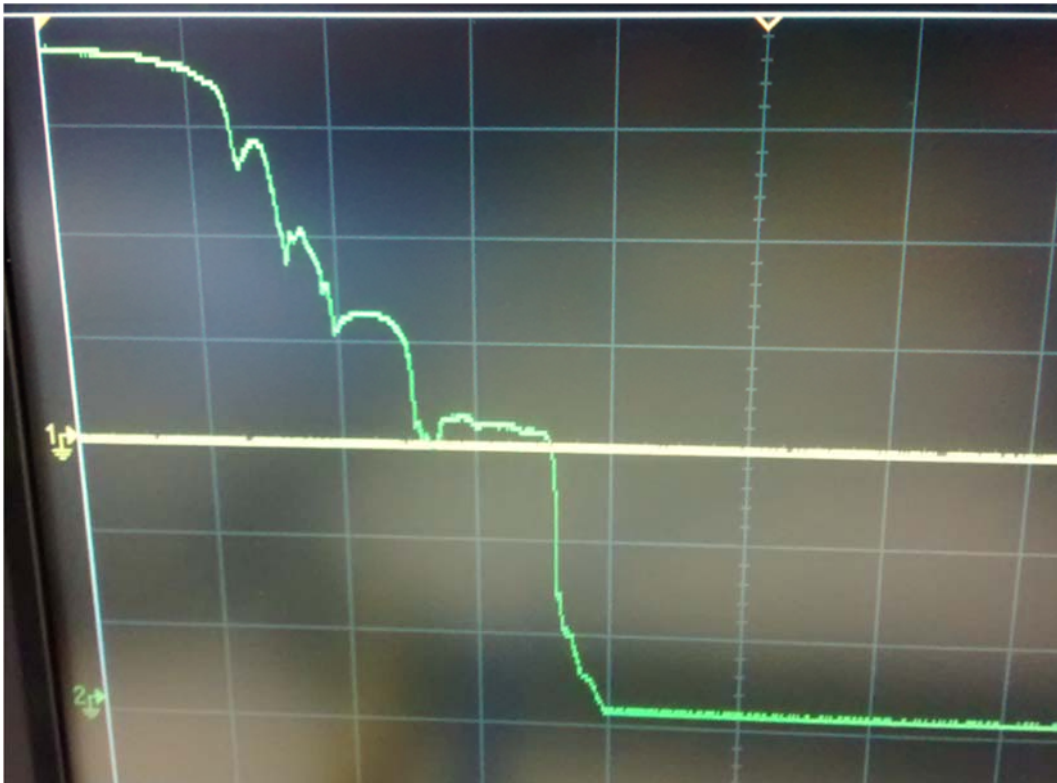
3.3 Auftreten von gequantelte Werten für den Leitwert

In Abbildung 10 sind die Stufen zu erkennen, welche einem kontinuierlichen Verlauf der Spannung widersprechen und auch einen Rückschluss auf den gequantelten Leitwert zulassen. Für den gequantelten Leitwert gilt:

$$\frac{\Delta I}{\Delta U} = \frac{2e^2}{h}$$

Das interessante hierbei ist nun, dass diese Werte nur noch von Naturkonstanten abhängen und einem Vielfachen von h entsprechen.

Abbildung 10: Bild der Spannungsstufen



³ Eine ausführlichere Beschreibung des Aufbaus und der Durchführung ist in Anhang 2 der Versuchsanleitung nach zu lesen.

4 Versuchsanleitung FP 16

4.1 Einleitung:

Eine der SI Einheiten ist das Ohm. Noch bis zur Mitte des 20. Jahrhunderts wurde das Ohm, ähnlich wie das kg noch heute, über einen Standard definiert. Die Normwiderstände, welche man auf Basis des standardisierten Widerstandes herstellte, wurden in regelmäßigen Abständen verglichen. Hierbei traten immer größere Abweichungen auf. Somit war keine echte langfristige und praktische Festlegung des Ohms möglich.

Erst 1980 gelang es, in 2-dimensionalen Halbleiterstrukturen bei extrem tiefen Temperaturen und sehr starken magnetische Feldern einen Widerstand zu entdecken, der einzig von Naturkonstanten abhängt, nämlich der Plankschen Konstanten h und der Elementarladung e . Seit dem 1. Januar 1990 dient die Konstante h/e^2 , als neuer Standard für den Widerstand. Diese neue Konstante geht direkt aus der mit dem Nobelpreis ausgezeichneten Entdeckung des Quantenhalfeffekts zurück. Seit dem besitzt die Konstante h/e^2 den jederzeit reproduzierbaren Wert von $25812,807\Omega$.

4.2 Theoretische Überlegungen:

Im vorliegenden Versuch ist es nun möglich, die Quantelung des Widerstandes zu Messen. Für diesen Versuch ist zwar ein Ausflug in die Quantenphysik nötig, jedoch ist der besondere Scharm dieses Experimentes, dass es unter „Küchentisch-Bedingungen“ einen Einblick in die Quantenphysik liefert. Dieser Versuch kann also ohne Magnetfelder und bei Raumtemperatur durchgeführt werden. Die Versuchsanordnung besteht im Wesentlichen aus zwei normalen Metalldrähten, die miteinander in Kontakt gebracht und anschließend wieder getrennt werden.

Werden die Metalldrähte in Kontakt gebracht und anschließend wieder gelöst, entsteht zwischen den Drähten ein kleiner Kontaktdraht, mit einem Durchmesser im Angströmbereich. Dieser Kontakt reißt ab, wenn die beiden makroskopischen Drähte weit genug voneinander entfernt werden.

Dieses Abreißen kann mit einem Kaugummi verglichen werden, der auseinandergezogen wird.

Die Elektronen, welche sich in diesem Kontakt-Nanodraht aufhalten, lassen sich wie folgt beschreiben.

Zunächst soll auf die Elektronen keine äußere Kraft, d.h. keine elektrische Spannung U wirken. Die Geometrie eines Nanodrahtes erlaubt, für die Bewegung der Elektronen, folgende Richtungen. Zum einen die Bewegung der Elektronen in der Ebene des Durchmessers des Nanodrahtes, welche sehr eingeschränkt ist. Zum anderen die Bewegung der Elektronen entlang der Längsachse des Nanodrahtes welche kaum eingeschränkt ist. Somit erhalten wir zwei unterschiedliche theoretische Beschreibungen für die zwei Bewegungsrichtungen.

Für die Bewegung in der Querschnittsfläche können wir folgende Vereinfachungen annehmen. Zum einen können wir davon ausgehen, da das Experiment bei Raumtemperatur durchgeführt wird, dass für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit außerhalb des Drahtes Null gilt. Daher können wir ein Kastenpotential (vgl.: Abb.: 1) annehmen. Da wir ohne Beachtung der Allgemeinheit davon ausgehen können, dass es sich bei der Querschnittsfläche um einen Kreis handelt, können wir eine beliebige Richtung betrachten, und alle anderen Richtungen als Gleichwertig betrachten. Die ausgewählte Richtung bezeichnen wir als x -Richtung und den Nullpunkt legen wir auf den Rand des Nanodrahtes. Daraus ergeben sich für die Wellenfunktion, mit der wir das Elektron beschreiben, folgende Randbedingungen:

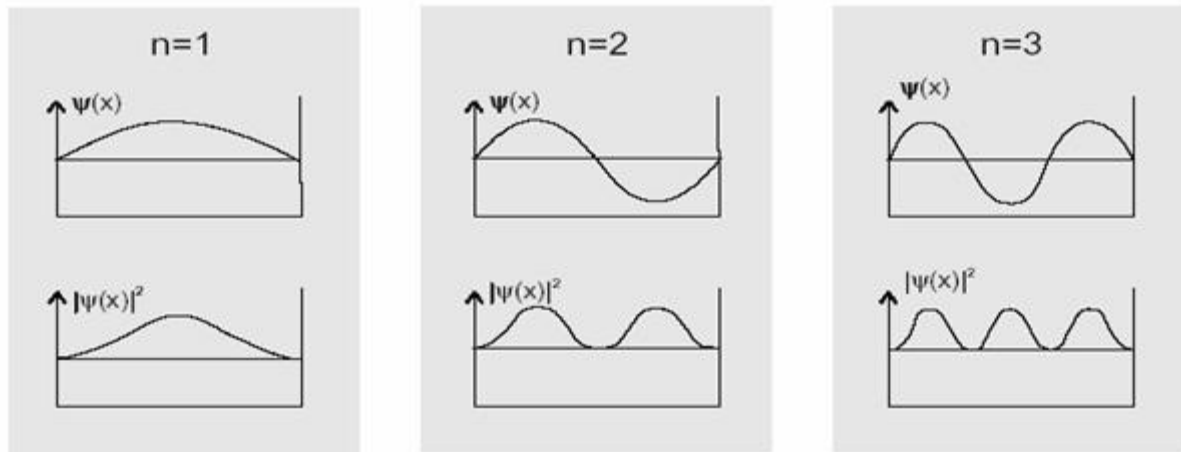


Abbildung 11: Darstellung der Wellenfunktion eines Elektrons im Kastenpotential.

Am Rand muss die Wellenfunktion gleich null sein. Wenn sie ungleich null wäre, ergibt sich daraus eine Aufenthaltswahrscheinlichkeit für die Elektronen außerhalb des Drahtes, was ja bereits ausgeschlossen wurde. Somit gilt für den ortsabhängigen Teil der Wellenfunktion:

$$\psi = A \cdot \sin(k_x \cdot x)$$

Wenn der Draht eine Länge von L_x besitzt gilt:

$$\psi(0) = \psi(L_x) = 0$$

Daraus ergeben sich für den Wellenvektor in x-Richtung k_x folgende Lösungen:

$$k_{xn} = \frac{n\pi}{L_x}$$

Damit gilt für die Wellenfunktion:

$$\Psi = A \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L_x} \cdot x\right)$$

Neben der Beschreibung des Elektrons als Welle, kann ein Elektron auch als Teilchen aufgefasst werden. Somit kann über die Beziehung:

$$p_{xn} = \hbar k_{xn}$$

Einem Teilchen ein Impuls in Abhängigkeit des Wellenvektors k_{xn} zugeordnet werden.

Aus der Energie Impuls Beziehung erhalten wir folgende Formel für die Energie:

$$E_{xn} = \frac{p^2 n}{2m} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL_x^2}$$

Anmerkung:

Diese Überlegungen basieren auf der Annahme, dass die Elektronen mit Hilfe des Sommerfeldmodells für freie Elektronen beschrieben werden können. Dies ist für gut leitende Metalle gerechtfertigt. Nicht beachtet werden die Einflüsse der Ionenrümpfe auf das Potential.

Bei Betrachtung der Formel für die Energie fällt auf, dass die Größe L, also die dicke des Drahtes, quadratisch und reziprok in die Energie eingeht. Daraus folgt, je kleiner der Durchmesser des Drahtes, desto größer wird die Energiedifferenz der aufeinander folgenden Energieniveaus sein.

Für die zweite Bewegungsrichtung der Elektronen (entlang des Fadens) können Längen L_z von bis zu 1/10mm auftreten. Hinzu kommt noch auf beiden Seiten die Ausdehnung der makroskopischen Drähte im mm Bereich. Setzt man diese Werte L_z nun in die Formel für die Energie ein, erhält man ebenfalls die Werte für die Energieaufspaltung, diese sind aber um den Faktor $(L_x/L_z)^2$, also um 10^8 bis 10^{10} kleiner. Diese Energieaufspaltungen können nicht mehr beobachtet werden. Somit können die Elektronen in L_z -Richtung, aufgrund der sehr kleinen Energieniveaus, wie klassische Teilchen mit einer parabolischen Energie-Impuls-Beziehung behandelt werden. Wohin gegen für die L_x -Richtung von einem quantenphysikalischen Teilchen, welches in einem Potentialtopf eingeschlossen ist, ausgegangen werden muss.

Im Weiteren folgt der Übergang, von der Betrachtung einzelner Elektronen, hin zu der Betrachtung der Gesamtzahl der Elektronen, welche sich in dem Golddraht befinden. Da es sich bei Elektronen um Fermionen handelt, also

Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen, gilt für sie die Fermistatistik. Diese sagt aus, dass jedes Energieniveau (Zustand) nur von einem Teilchen besetzt werden darf (Pauliverbot). Daraus folgt, dass die Zustandsdichte $Z(E)$ folgendermaßen definiert ist:

$$Z(E) = \frac{1}{\pi\hbar} \sqrt{\frac{m}{2E}}$$

Von Interesse hierbei ist, dass nur die Hälfte der berechneten Zustandsdichte für die Rechnung Verwendung findet. Anschaulich betrachtet ist dies der Tatsache geschuldet, dass nur Elektronen einer Impulsrichtung zum Stromtransport beitragen.

Im Folgenden legen wir eine Spannung U an die Golddrähte an. Dadurch werden die Ferminiveaus in dem Golddraht, an welchem die Spannung U anliegt, um eU (Elementarladung mal Spannung) angehoben. Durch den Unterschied der Ferminiveaus in den beiden Golddrähten, können nun Elektronen über den Nanodraht vom höheren zum niedrigeren Energieniveau gelangen.

Bei einer infinitesimalen Spannungserhöhung um ΔU , wird sich die Stromstärke I um

$$\Delta I = \Delta n \cdot (-e) \cdot v$$

erhöhen. Dabei ist Δn die Anzahl der Elektronen pro Längeneinheit, die aufgrund der Spannungserhöhung zusätzlich zum Strom beitragen. Ihre Energie liegt zwischen E und $E + \Delta E = E - e\Delta U$. Als:

$$\Delta n = Z(E) \cdot \Delta E$$

Die Geschwindigkeit v kann aus der klassischen Energie-Impuls-Relation gewonnen werden.

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

Damit folgt für den Stromfluss folgende Gleichung:

$$\Delta I = \frac{1}{\pi \hbar} \sqrt{\frac{m}{2E}} \cdot (-e) \Delta U \cdot (-e) \sqrt{\frac{2E}{m}} = \frac{2e^2}{h} \Delta U$$

Bilden wir jetzt den Leitwert, indem wir die Stromänderung ΔI durch die Spannungsänderung ΔU teilen, erhalten wir nur:

$$\frac{2e^2}{h}$$

Die besondere Eigenschaft eines 1D-Systems liegt also darin, dass der Leitwert komplett von der Energie und sonstigen materialabhängigen Parametern, wie etwa der Masse des Elektrons, unabhängig ist. Bei Systemen mit einer anderen Dimensionalität ist dies nicht der Fall.

4.3 Aufbau und Funktionsweise:

Durch die Bewegung des Lautsprechers, werden die Drähte zusammengedrückt und wieder getrennt. Mittels einer 5 Volt Spannungsquelle wird der Lautsprecher versorgt. Die Frequenz wird mittels des Osziloscops erzeugt.

Vor der Durchführung des Versuchs überprüfen Sie bitte die Einstellung des Oszis. Über die Funktion „Wavegen“ wird die Ausgabe der Funktion gestartet. Das Oszi muss nun so eingestellt werden, dass der Abriss des Stroms gut sichtbar ist. Die Trigger-Funktion muss mit der Ausgabe für die Wellenfunktion gekoppelt werden.

Überlegen Sie sich eine geeignete Schaltung, um die erzeugte Frequenz auf die 5 Volt Gleichspannung auf zu Modellieren.

Die von Oszi angezeigten Spannungen (Channel 1 und 2) werden an unterschiedlichen Stellen abgegriffen. Für die Auswertung wichtig ist Channel 2 (grün). Die Spannung wird an einer Schaltung abgegriffen, welche aus einem 100 Ohm Widerstand, einer 1,5 Volt Batterie und den beiden Drähten über dem Lautsprecher besteht.

Welche Aufgabe hat dieser Aufbau?

4.4 Durchführung:

Bauen Sie die Schaltung auf. (Abnahme durch den Betreuer)

Überprüfen Sie die Einstellungen am Oszi

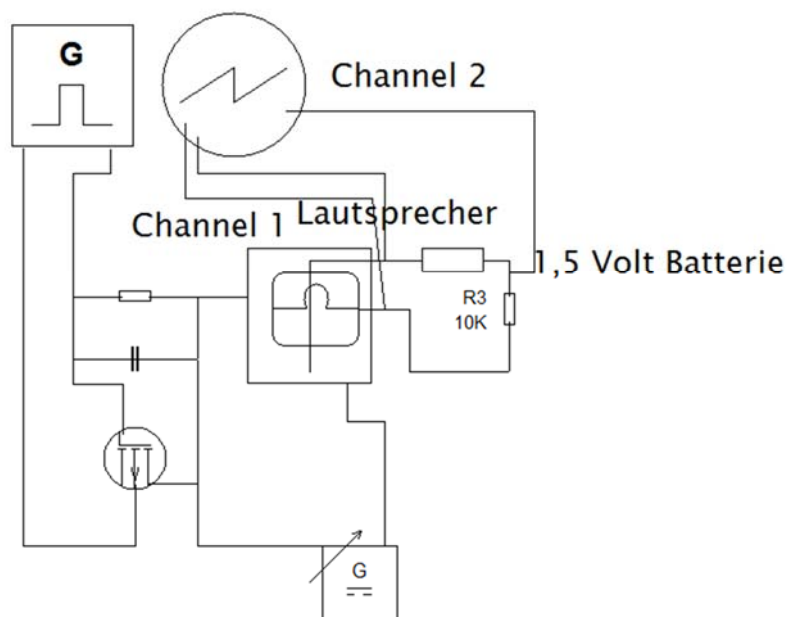
Messen Sie die Cu- Gold- und die Platinprobe

4.5 Auswertung:

Zeichnen Sie für jede Probe ein Histogramm der Leitwerte

Bestimmen Sie die Positionen der Peaks in Ihrem Histogramm. Fitten Sie hierzu jeweils eine Gauß-Funktion der Form $(a \exp(-(x-\mu)^2/2\sigma^2))$ an eine geeignete Umgebung um Peak herum an und vergleichen Sie die Leitwerte mit dem entsprechenden Vielfachen von $2e^2/h$.

Schaltplan:



5 Literaturverzeichnis

- Tipler, A. P., Llewellyn R. A. (2010): Moderne Physik. 2. Aufl., München
- Nolting, W. (1992): Grundkurs: Theoretische Physik 5 Quantenmechanik
Teil 1 Grundlagen. Ulmen
- Tipler, A.P., Mosca A. (2009): Physik für Wissenschaftler und Ingenieure. 6.
Auflage. Heidelberg
- Hunklinger S. (2009): Festkörperphysik. 2. verbesserte Auflag, München
- Ezawa Z. (2008): Quantum Hall Effects. Secend Edition, Singapore
- Kircher, E.; Schneider, W. (Hrsg.) (2002): Physikdidaktik in der Praxis 7.
- Wiesner, R. M. (kein Datum). Abgerufen am 19. 09 2010 von
[http://www.didaktik.physik.uni-
muenchen.de/materialien/inhalt_materialien/milq/muc_unterricht.pdf](http://www.didaktik.physik.uni-muenchen.de/materialien/inhalt_materialien/milq/muc_unterricht.pdf)
- Mikelskis, H. F. (2006). Physik Didaktik Praxishandbuch für die
Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen Verlag.
- Wilhelm, T. (2010). Ausgewählte Probleme der Didaktik der Physik für LA
Gym. Ausgewählte Probleme der Didaktik der Physik für LA Gym .
[http://www.physik.uni-
augsburg.de/did/downloads/scripts/physikdidaktik/gymnasium/Kapitel11-
13.pdf](http://www.physik.uni-augsburg.de/did/downloads/scripts/physikdidaktik/gymnasium/Kapitel11-13.pdf), Bayern, Deutschland.
- Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) Bayern;
Aufgerufen am 22.12.2014
[http://www.isb-gym8-
lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26439](http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26439)
- Hartmut Wiesner, R. M. (2010).
Abgerufen am 15.12.2014
[http://www.didaktik.physik.uni-
muenchen.de/materialien/inhalt_materialien/milq/muc_unterricht.pdf](http://www.didaktik.physik.uni-muenchen.de/materialien/inhalt_materialien/milq/muc_unterricht.pdf)