

impulse

für guten Mathematikunterricht



Inhalt

Erfahrungen mit der „Escape-Room“-Methode.....	3
Brüche als Verhältnisse – verhältnismäßig (un)wichtig?.....	5
Der schöne Windvogel	9
Erfahrungen mit ChatGPT im Mathematikunterricht	11
Stein für Stein zum Erfolg: LEGO-Türme und direkte Proportionalität	16
Ist das Glas halbleer – oder ist das Glas halb?	18
AuxQuadrat – ein Projekt für Schüler*innen	20
Bericht über Treffen mit Fachbetreuer*innen	21
Buchbesprechung: Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 4	21
Mathematik für Demokratie – Stellungnahme der DMV	22
Termine und Informationen	24

Editorial

Liebe Leserin, lieber Leser,

die Augsburger „*impulse* für guten Mathematikunterricht“ liegen jetzt schon in dritter Auflage vor! Das Konzept dieser Zeitschrift, praktikable Ideen für den Mathematikunterricht zu kommunizieren und dabei einen Austausch von Universität und Schulpraxis zu ermöglichen, hat sich bewährt. Wir konnten schon einige Beiträge von Kolleginnen und Kollegen aus der Schulpraxis veröffentlichen. So soll es auch weitergehen! Wenn Sie also Ideen, Erfahrungen oder Impulse aus Ihrem Mathematikunterricht haben, die Sie an Kolleg*innen weitergeben möchten, schreiben Sie uns gerne an – wir freuen uns auch über Lob, Kritik, Anregungen, Verbesserungsvorschläge, ...

Sabrina Bersch, Andreas Merkel, Renate Motzer, Reinhard Oldenburg, Samuel Pfeifer

(das Redaktionsteam)

Erfahrungen mit der „Escape-Room“-Methode

Interview mit Sebastian Kirscher, Gymnasium Neusäß

Sebastian Kirscher ist Mathematiklehrer am Gymnasium Neusäß. Er ist dort Fachschaftsleiter und betreut die Studierenden im studienbegleitenden Praktikum. Wir haben ihn zu seinen Erfahrungen mit der „Escape-Room“-Methode befragt...

impulse: Bei euch an der Schule kann man „Escape-Room“-Material für eine Unterrichtsstunde ausleihen. Wie sieht das Material aus?

Sebastian Kirscher: Wir haben uns als Fachschaft mal ein Arbeitsmaterial vom Auer-Verlag angeschafft, das „Escape-Rooms im Mathematikunterricht“ heißt. Das sind letztlich Kopiervorlagen, die sich leicht im Unterricht einsetzen lassen. Zum Beispiel zum Thema „Rationale Zahlen“ oder „Rechnen mit Wurzeln“. Man muss dann zusätzlich zu den Aufgaben auf dem Arbeitsblatt eine spielerisch-kreative Aufgabe lösen, um auf einen dreistelligen Zahlencode zu kommen. Und damit darf man dann das nächste Blatt bearbeiten. Mir war das ein bisschen zu wenig und darum habe ich Zahlenschlösser angeschafft, die dreistelligen gibt es recht günstig. Dann habe ich Umschläge hergenommen, gelocht und mit einem Zahlenschloss „verschlossen“. Eine kleine Kiste mit Süßigkeiten wurde auch noch mit einem Schloss verschlossen, die konnte man dann mit dem letzten Code öffnen. Die Umschläge habe ich dann etwas perfektioniert, sodass sie nicht so leicht reißen. Die Umschläge und die Kiste findet man in einer größeren Kiste, die man dann ausleihen und zusammen mit den Kopiervorlagen verwenden kann. Dann sind im Laufe der letzten zwei, drei Jahre noch ein paar „Escape-Room“-Kopiervorlagen dazu gekommen.



i: Welche Stunden und welche Themen eignen sich besonders gut für diese Methode?

SK: Übungsstunden eignen sich besonders gut. In erster Linie Stunden, in denen es um Rechentechniken geht, aber auch zu stochastischen Themen oder zum Thema Parabeln – da verwende ich auch gerne *learningapps*¹, das hat sich bewährt, weil nichts kopiert werden muss, sondern nur ein QR-Code eingescannt wird. Das ist einerseits eine nette Abwechslung und andererseits ermöglicht dies, dass man etwas Graphisches oder eine Multiple-Choice-Aufgabe einbauen kann. Wenn die gelöst ist, erscheint dann der nächste QR-Code. Ich würde *learningapps* allerdings nur zur Auflockerung einsetzen, da der Lernerfolg beim Arbeiten mit Stift und Papier größer ist. Aber ich suche schon seit langem nach Auflockerungsmöglichkeiten für Übungsstunden, die ja doch ihren berechtigten Platz im Mathematikunterricht haben – und da, finde ich, bietet so eine „Escape-Room“-Übungsstunde viel Potential.



i: Wie wird denn die Methode von den Schüler*innen aufgenommen?

SK: Das erste Mal, als ich das Material ausprobiert habe, und zwar in einer recht trägen neunten Klasse, war ich sehr, sehr überrascht über die motivierende Wirkung. Die Kids haben sich auf die Aufgaben gestürzt und haben alle gemeinsam in Teams gearbeitet, der Wettbewerbscharakter hat zusätzlich motiviert und es hat allen sehr viel Spaß bereitet.

i: Gibt es neben der Motivation weitere Vorteile? Hat die Methode auch Grenzen?

SK: Der große Vorteil dieser Methode ist die Motivation und die Abwechslung, die es für „trockene“ Übungsstunden bietet. Der Aufwand hält sich auch in Grenzen, man muss „alte“ Übungsblätter lediglich neu aufteilen und sich LösungsCodes ausdenken (z. B. die n-te Ziffer der n-ten Aufgabe). Außerdem gibt es unterschiedliche Varianten: gleichstarke Teams kämpfen gegeneinander, jeder „spielt“ einzeln, oder alle „spielen“ gegen den Lehrer, also wenn die Klasse gemeinsam alle Aufgaben schafft, bekommen sie die Süßigkeiten, ansonsten nicht. Die Grenze der Methode ist vielleicht eher bei Argumentationsaufgaben oder kreativen Aufgaben erreicht, weil die Methode auch einen gewissen Zeitdruck mit sich bringt.

i: Du machst im Moment auch ein P-Seminar zum Thema „Escape-Rooms“. Wie ist denn da der Stand der Dinge?

SK: Die Begeisterung der Schüler hat mich inspiriert, ein P-Seminar „Mathe-Escape-Room“ auszuprobieren. Die Schüler konzentrieren sich im Moment auf einen aufwändig produzierten Escape-Room mit Film-Intro und Gamification-Elementen, einer Story und mit passendem Material für eine neunte Klasse. Hier soll die Freude am Tüfteln und an der Mathematik erlebbar werden, ich bin gespannt auf das Ergebnis!

i: Wir auch! Danke für das Gespräch!

¹ [LearningApps.org](https://www.learningapps.org/) - interaktive und multimediale Lernbausteine

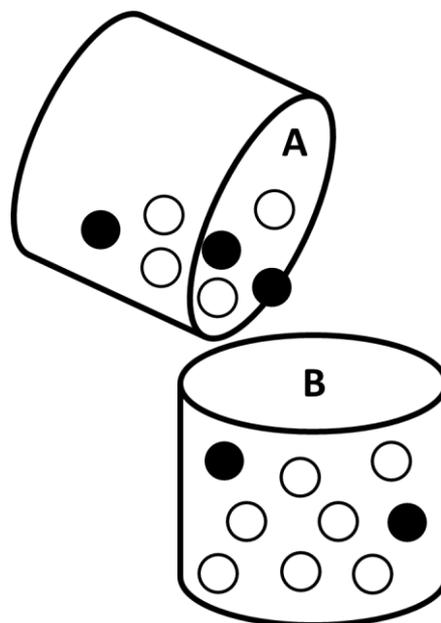
Brüche als Verhältnisse – verhältnismäßig (un)wichtig?

Sabrina Bersch, Universität Augsburg

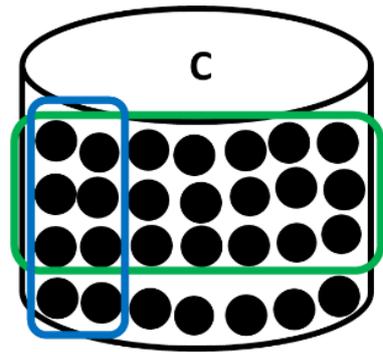
In diesem Artikel möchte ich Sie dazu einladen, mit mir gemeinsam über ein paar Fragen nachzudenken, zu denen ich zwar verschiedene Überlegungen, aber nicht immer eine abschließende Antwort präsentieren kann. Vielmehr würde ich mich freuen, wenn Sie mir mit Ihren Erfahrungen aus der Praxis Impulse zum Weiterdenken liefern, indem Sie mir nach der Lektüre dieses Artikels von Ihren Gedanken berichten.

Studierende des Mathematiklehramts begegnen in der Didaktik irgendwann dem Thema *Grundvorstellungen zu Brüchen*. Sie erfahren, dass es verschiedene Grundvorstellungen (stimmige, inhaltlich richtige Deutungen eines Konzeptes, die diesem Sinn verleihen) zu Brüchen gibt – beispielsweise die Anteilsvorstellung („Bruch als relativer Anteil einer Gesamtmenge: $\frac{a}{b}$ von c “) und die Verhältnisvorstellung („Bruch als Verhältnis: $\frac{a}{b} = a : b$ (“ a zu b “)). Während erstere den Studierenden meist sofort bekannt vorkommt und gut zu ihren eigenen Vorstellungen passt, zeigen sich häufig Unsicherheiten bezüglich der Verhältnisvorstellung. Diese werden noch verstärkt, wenn wir darüber sprechen, dass die Verhältnisvorstellung eine mögliche Ursache für einen typischen Fehler von Lernenden bei der Bruchaddition sein kann:

Interpretieren wir mal die falsche Addition $\frac{3}{4} + \frac{2}{7} = \frac{5}{11}$ mit der Verhältnisvorstellung: In Urne A sei das Verhältnis von schwarzen zu weißen Kugeln 3 zu 4, in Urne B sei das Verhältnis von schwarzen zu weißen Kugeln 2 zu 7. Gemäß einer gängigen Grundvorstellung zur Addition bedeutet Addieren das Vereinigen zweier Mengen. Wir stellen uns also vor, dass wir die Kugeln zusammenschütten. Dann ist das neue Verhältnis von schwarzen zu weißen Kugeln 5 zu 11, also 5: 11 oder $\frac{5}{11}$. In dieser Interpretation erscheint die falsche Bruchaddition also auf den ersten Blick sinnvoll. Wir wissen aber, dass das nicht stimmen kann, denn das korrekte Ergebnis ist $\frac{29}{28}$, also definitiv ungleich $\frac{5}{11}$. Wo also liegt der (Denk-) Fehler, wenn wir doch unsere Überlegungen auf Grundvorstellungen aufbauen, die per Definition inhaltlich richtige Deutungen von Konzepten sind?



Wird die Addition als Vereinigung zweier Mengen interpretiert, so werden die Anzahlen von Elementen der beiden Mengen addiert – nicht die Verhältnisse der Elemente innerhalb dieser Mengen. Im Kontext der Bruchrechnung kann das so interpretiert werden, dass zwei Anteile, die sich auf das gleiche Ganze beziehen, zu einem neuen Anteil des gleichen Ganzen zusammengefügt werden: Nehmen wir $\frac{3}{4}$ aller Kugeln einer Urne C mit (geschickt



gewählten) 28 Kugeln, dann sind das 21 Kugeln. Zu diesen nehmen wir $\frac{2}{7}$ von 28 Kugeln, also 8 Kugeln, hinzu. Dann haben wir insgesamt 29 von 28 Kugeln – dafür brauchen wir in unserer Vorstellung sogar noch eine (imaginäre) Kugel mehr als die, die wir anfangs hatten. Jetzt stellt sich mir die Frage, was eigentlich „das Ganze“ ist. Können wir das beliebig wählen? Oder ist das fix? Ganz allgemein könnten wir formulieren: $\frac{3}{4}$ eines Ganzen (aller Kugeln / der Länge einer Strecke) und $\frac{2}{7}$ des gleichen Ganzen (der gleichen Kugeln / der gleichen Streckenlänge) sind zusammen $\frac{29}{28}$ des Ganzen (aller Kugeln / der Streckenlänge) – also sogar mehr als das Ganze (als alle Kugeln / als die Länge der gesamten Strecke). Es war geschickt, als Ganzes die Anzahl der Kugeln in Urne C so zu wählen, dass sie sich durch 4 und 7 teilen lässt. Schöner ist es, ein Beispiel aus einem Größenbereich (z. B. Längen oder Gewichte) zu wählen, in dem man beliebige Größen als Ganzes wählen und diese immer durch 4 und 7 teilen kann.

Wie wichtig es ist, sich auf das „richtige“ Ganze zu beziehen, zeigt auch folgendes Beispiel (mit den gleichen Zahlen wie oben): Stellen Sie sich vor, Sie teilen sich mit jemandem zwei Pizzen. Sie essen $\frac{3}{4}$ der einen Pizza und $\frac{2}{7}$ der anderen Pizza. Wenn Sie nun erzählen, dass Sie insgesamt $\frac{29}{28}$ (einer Pizza) oder eher „ein bisschen mehr als eine Pizza“ gegessen haben, dann beziehen Sie sich darauf, welchen Anteil einer Pizza Sie gegessen haben und nicht, welchen Anteil Sie von zwei Pizzen gegessen haben.

Zurück zur Verhältnisvorstellung: Was ist nun das Ganze, wenn wir die Verhältnisvorstellung zu Grunde legen? Ein Verhältnis von 3 zu 4 Kugeln in Urne A bedeutet, dass wir insgesamt 7 Kugeln haben. Das ist aber das gleiche Verhältnis, wie wenn wir in einer Urne 6 schwarze und 8 weiße Kugeln haben, insgesamt also 14. Das passt, denn beim Erweitern ändert sich der Wert eines Bruches nicht. Und wenn wir stattdessen für die Interpretation wieder in einen Größenbereich gehen, dann können wir den Bruch sogar mit einer beliebigen rationalen Zahl „erweitern“, das Verhältnis, das dadurch beschrieben wird, bleibt immer gleich. Ein Spezialfall wäre folgender: Wir

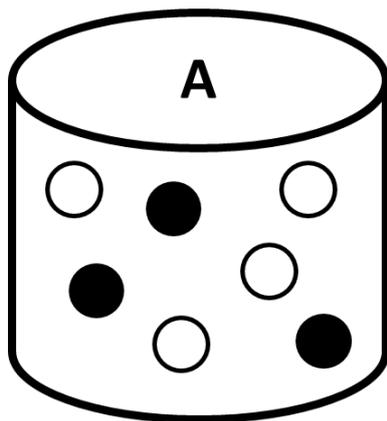
multiplizieren Zähler und Nenner: $\frac{3 \cdot \frac{1}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{3}{4}$. Das können wir interpretieren: Wenn wir eine

Strecke im Verhältnis $\frac{3}{4}$ oder „3 zu 4“ teilen, bedeutet das, dass wir die Strecke gedanklich in 7 gleich lange Teilstrecken teilen und einmal 3 davon und einmal 4 davon zu je einer Teilstrecke zusammennehmen. Obige Gleichung sagt uns, dass das auch bedeutet, dass die eine Teilstrecke $\frac{3}{4}$ mal so lang ist wie die andere. Die Verhältnisvorstellung hilft uns also, Teile eines Ganzen miteinander zu vergleichen oder natürlich auch, Verhältnisse

miteinander zu vergleichen. Das Addieren auf Grundlage der Verhältnisvorstellung erscheint mir nach obigen Überlegungen nicht als sinnvoll. Das ist vermutlich einer der Gründe, warum im Schulunterricht die Anteilsvorstellung von Brüchen im Vordergrund steht. Diese erweist sich nämlich als tragfähig, um das Vergleichen von und Rechnen mit Brüchen zu erarbeiten.

Eine Studentin fragte kürzlich, ob die Verhältnisvorstellung in der (Schul)Praxis denn dann überhaupt relevant sei, ob diese beispielsweise in Schulbüchern vorkäme. Diese Frage regte mich (mal wieder) zum Nachdenken über diese Vorstellung an. In welchen Situationen ist die Verhältnisvorstellung hilfreich und vielleicht sogar besser als die Anteilsvorstellung? Wo spielen Verhältnisse im Mathematikunterricht eine Rolle? Werden diese mit Brüchen ausgedrückt? Ist der Zusammenhang zwischen der Anteilsvorstellung und der Verhältnisvorstellung von Brüchen wichtig? Oder ist dieser Zusammenhang vielleicht verhältnismäßig unwichtig, sodass wir unsere Studierenden erst gar nicht damit konfrontieren (und verwirren) sollten? Dazu nun ein paar meiner Gedanken:

Anteilsvorstellung und Verhältnisvorstellung stehen in einem engen Zusammenhang – schließlich haben sie sich als Grundvorstellungen zum gleichen Konzept etabliert.



Betrachten wir nochmal unsere Urne A mit 3 schwarzen und 4 weißen Kugeln. Dann können wir darin nicht nur das Verhältnis der verschiedenfarbigen Kugeln zueinander (3:4) sehen, sondern auch den Anteil schwarzer Kugeln ($\frac{3}{7}$) und weißer Kugeln ($\frac{4}{7}$) in der Urne. Zusammen sind das alle Kugeln: $\frac{3}{7} + \frac{4}{7} = 1$, das passt. Durch die Färbung wurden die 7 Kugeln in zwei Teilmengen mit 3 bzw. 4 Kugeln zerlegt. Von oben wissen wir: Es sind also $\frac{3}{4}$ -mal so viele schwarze Kugeln in der Urne wie weiße Kugeln – das ist übrigens die

Vorstellung eines Bruchs als Vergleichsoperator. Wir könnten auch die beiden Anteile ins Verhältnis zueinander setzen und bekommen (logischerweise!?) das gleiche Verhältnis wie das der absoluten Kugeln: $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{7}} = \frac{3}{4} = 3:4$. Wichtig ist, sich folgenden Unterschied beim

Zerlegen klarzumachen:

- „ $\frac{3}{4}$ eines Ganzen“ bedeutet: „Ich zerlege das Ganze in 4 Teile und nehme 3 davon“. (Das ist mit unseren 7 Kugeln leider nicht so schön vorstellbar, da eignen sich z. B. wieder Längen besser, siehe oben.)
- „Das Ganze wird im Verhältnis $\frac{3}{4}$ zerlegt“ bedeutet: „Das Ganze wird in $\frac{3}{7}$ und $\frac{4}{7}$ zerlegt.“ Das passiert durch die Färbung der Kugeln in Urne A.

Wo tauchen denn nun im Mathematikunterricht Verhältnisse auf und brauchen wir dabei Brüche und die zugehörige Verhältnisvorstellung?

Überlegungen zum Maßstab in der 5. Klasse kommen ohne Brüche aus, üblich ist die Formulierung „im Maßstab 1:1000“. Was aber bedeutet das? Ein Zentimeter auf der Karte

sind $1000 \text{ cm} = 10 \text{ m}$ in Wirklichkeit, 2 cm sind also 20 m , 10 cm sind 100 m ,... - es liegt also ein direkt proportionaler Zusammenhang vor. Der (gedankliche) Weg in die 7. Klasse ist nicht weit: Eine Eigenschaft direkt proportionaler Zusammenhänge ist die Quotientengleichheit – oder Verhältnisgleichheit: Unabhängige und abhängige Größe stehen im gleichen Verhältnis zueinander und dieses Verhältnis wird (selbstverständlich?) als Bruch notiert – ebenso wie die zugehörige konstante Steigung der Graphen linearer Funktionen: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Die Katheten der Steigungsdreiecke stehen im Verhältnis y zu x . Hier kommen wir vermutlich mit der Anteilsvorstellung von Brüchen an unsere gedanklichen Grenzen, oder?

Wenn wir nun schon gedanklich bei Dreiecken sind, könnten wir noch kurz über Trigonometrie nachdenken: Sinus und Kosinus werden als Verhältnisse von Strecken in Dreiecken interpretiert und wieder mit Brüchen notiert. Auch beim Themenbereich *Ähnlichkeit*, insbesondere bei den Ähnlichkeitssätzen, werden Streckenlängen ins Verhältnis gesetzt und Aussagen über Verhältnisgleichheit gemacht.

Das waren zugegeben wenige Beispiele, aber doch wichtige Themenbereiche der Sekundarstufe. Wenn die Verhältnisvorstellung von Brüchen dort selbstverständlich verwendet wird, würde es sich dann also vielleicht doch lohnen, diese Grundvorstellung vorab zu etablieren? Dann bleibt die Frage: Wann? In Schulbuchkapiteln zur Einführung von Brüchen und Bruchrechnung ist dies nicht vorgesehen. Ist es vielleicht trotzdem sinnvoll, bereits von Beginn an diese Grundvorstellung mit aufzubauen? Eine Anregung dazu aus dem Kontext „Essen und Trinken“ findet sich z. B. im kurzen Artikel *Die Mischung macht's: Verhältnisse und Brüche – ein ambivalentes Verhältnis?* von Christine Streit und Bärbel Barzel².

Oder ist es besser, die Lernenden erst dann mit der Verhältnisvorstellung zu konfrontieren, wenn sie diese brauchen, um damit Situationen zu verstehen, die mit der Anteilsvorstellung nicht mehr sinnvoll interpretiert werden können? Wird diese notwendige Erweiterung der vorhandenen Grundvorstellungen von Brüchen explizit thematisiert? Oder gehen wir davon aus, dass sich diese schon automatisch ergibt?

Abschließend bedanke ich mich dafür, dass Sie bis hierher meinen Gedanken gefolgt sind. Jetzt würde ich mich sehr über Ihre Gedanken und Erfahrungen aus der Schulpraxis zum Thema freuen. Melden Sie sich per E-Mail an sabrina.bersch@uni-a.de.

² Zum Weiterlesen: Streit, C. & Barzel, B. (2013). *Die Mischung macht's. Verhältnisse und Brüche – ein ambivalentes Verhältnis?* In: *mathematik lehren* 179, 9-11.

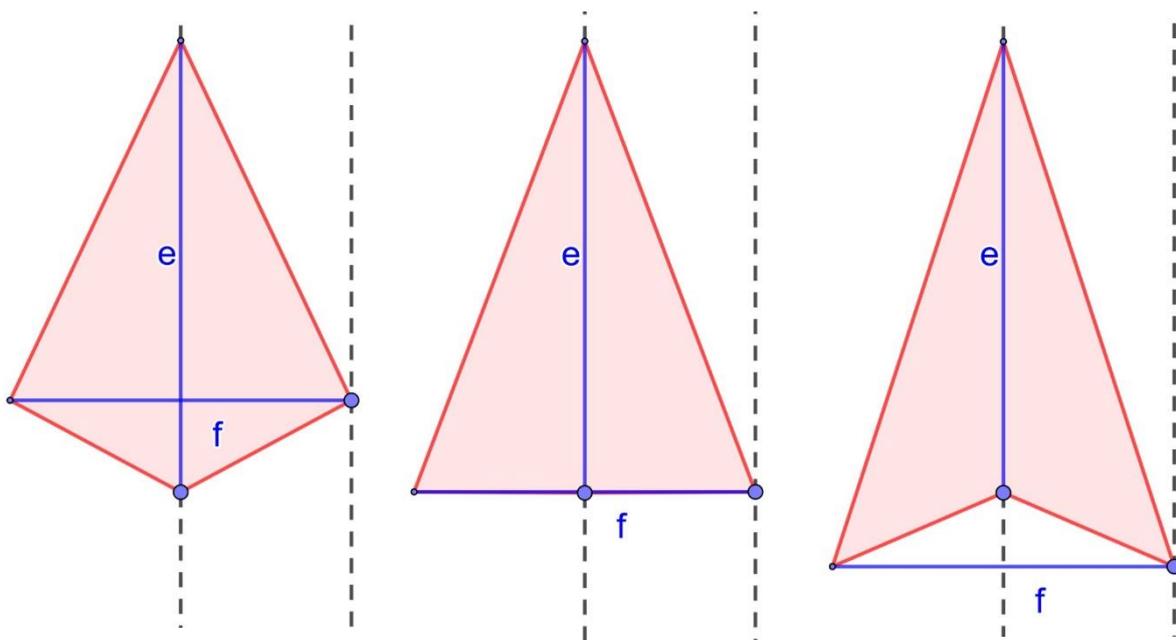
Der schöne Windvogel

Andreas Merkel, Universität Augsburg

Bei der Behandlung der symmetrischen Vierecke kommt der konkave Drachen, den man auch unter den Bezeichnungen *Windvogel* und *Pfeilviereck* kennt, mitunter zu kurz. Das ist einerseits erklärbar, passt er doch nicht in das klassische Haus der konvexen Vierecke, andererseits schade, stellt er doch bei geeigneter Wahl der Proportionen und Winkel eine besonders ästhetische Figur dar. Aber auch innermathematisch hat der Windvogel ein paar hübsche Facetten:

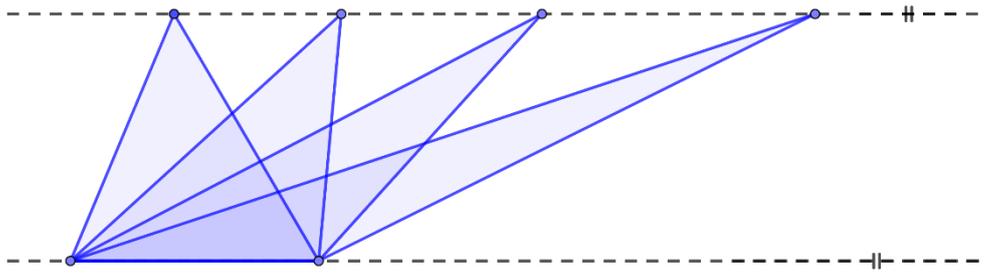
Grenzfall gleichschenkliges Dreieck

Beim Experimentieren mit GeoGebra (vgl. QR-Code und Link unten) erkennt man neben der besonderen Ästhetik des Windvogels einen Grenzfall, der den konkaven vom konvexen Drachen trennt: das gleichschenklige Dreieck.



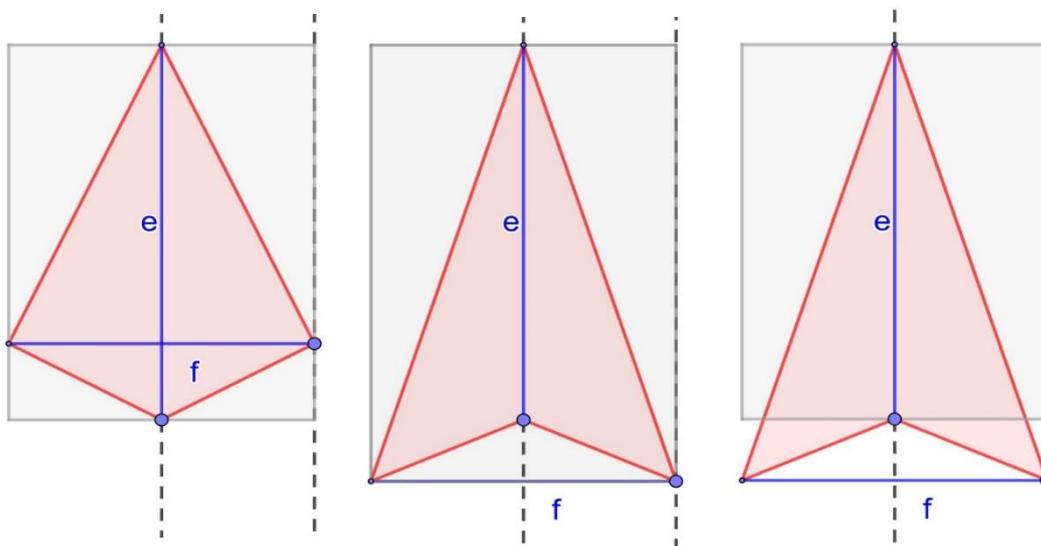
Elegante Herleitung der Flächeninhaltsformel

Betrachtet man den oben angesprochenen Grenzfall des gleichschenkligen Dreiecks genauer, erkennt man eine allgemeingültige Herleitung der Flächeninhaltsformel. Sowohl der konvexe als auch der konkave Drachen lassen sich unter Beibehaltung des Flächeninhalts in ein gleichschenkliges Dreieck verwandeln, dessen Basis und Höhe durch die beiden Diagonalen der Drachen gegeben sind. Die Formel für den Flächeninhalt $F = \frac{1}{2}ef$ kann abgelesen werden. Der schulunübliche Fachausdruck „Scherung“ kann vermieden werden, finden sich doch in vielen Schulbüchern Skizzen wie die folgende, aus der hervorgeht: Der Flächeninhalt eines Dreiecks hängt nur von Grundlinie und Höhe, nicht jedoch von der Gestalt des Dreiecks ab.



Abneigung gegen rechteckige Käfige

Der schöne Vogel hat aber auch Allüren, er hat offenbar eine Abneigung gegen Rechtecke oder, um im Bilde zu bleiben, gegen Käfige: Ergänzt man den konvexen Drachen wie im Bild links dargestellt zu einem Rechteck, dann sieht man die Flächeninhaltsformel und insbesondere den Faktor $\frac{1}{2}$ recht schnell, das ist ein weit verbreiteter Weg zur Flächeninhaltsformel. Sperrt man dagegen den Windvogel in einen rechteckigen Käfig, dann sieht man die Flächeninhaltsformel, wenn überhaupt, nur mit größter Mühe, vgl. Bild in der Mitte. Der für den konvexen Drachen passende Käfig „ef“ im rechten Bild ist für den Windvogel zu klein, immerhin sieht man hier die Flächeninhaltsformel mit etwas Routine wieder mit Hilfe der Eigenschaft gescherter und damit flächeninhaltsgleicher Dreiecke.



<https://www.geogebra.org/m/ztzyuycc>



Erfahrungen mit ChatGPT im Mathematikunterricht

Samuel Pfeifer, Universität Augsburg

Dieser Beitrag möchte einige Anregungen liefern, wie man ChatGPT im Rahmen des Mathematikunterrichts sinnvoll einsetzen kann.

Anregung 1: ChatGPT als Tutor

Einige internationale Studien über den Einsatz von ChatGPT in Lernprozessen des Mathematikunterrichts betonen die positive Rolle von ChatGPT als *Tutor*³. Ein Tutor ist m. E. jemand, der auch *neues* Wissen vermitteln kann. Wir wollten wissen, ob ChatGPT tatsächlich dazu in der Lage ist. Daher haben wir im Rahmen eines Unterrichtsversuchs in einer achten Klasse (Gymnasium) folgendes Aufgabenformat ausprobiert:

Eine Nullstelle x_0 ist der x -Wert, den man in $f(x)$ einsetzt, so dass Null heraus kommt. Es gilt also $f(x_0) = 0$. Ihr wisst bereits, wie man die Nullstelle für eine lineare Funktion berechnet.

- a) Lasst euch von ChatGPT zeigen, wie man die Nullstelle von gebrochen-rationalen Funktionen berechnet! Fordert ChatGPT dazu auf, die Nullstelle von folgender Funktion zu berechnen:

$$f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$$

Kontrolliert das Ergebnis von ChatGPT mit Hilfe von GeoGebra!

- b) Formuliert eine Anleitung zur Berechnung der Nullstelle von f auf dem beiliegenden Blatt Papier!

Die Aufgabe erfordert grundlegende Kenntnisse über einfache gebrochen-rationale Funktionen (welche zum Zeitpunkt der Unterrichtsstunde vorausgesetzt wurden). Sie zielt darauf ab, dass die Schüler*innen neues, „benachbartes“ Wissen erwerben. Die „Wissenslücke“ ist zwar nicht groß, handelt aber schon vom Rechnen mit Bruchtermen, was zum Zeitpunkt der Behandlung einfacher gebrochen-rationaler Funktionen noch nicht trainiert wurde. Teilaufgabe a) fordert explizit zur Kontrolle der von ChatGPT produzierten Lösung mittels GeoGebra auf.⁴ Denn, wer weiß? Vielleicht hat ChatGPT ja (mal wieder) Blödsinn produziert...

³ Wardat et al., 2023 oder Guo et al., 2023

⁴ Die wechselseitige Verwendung von ChatGPT und GeoGebra bietet Potential – z. B. prompts wie: „Erkläre mir, wie ich in GeoGebra dies oder das Problem lösen kann“.

Hier drei Schülerlösungen zu Teilaufgabe b):

$f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$
 $0 = \frac{a}{x-b} + c \quad | -c$
 $0 - c = \frac{a}{x-b}$
 $\frac{1}{0-c} = \frac{x-b}{a} \quad | \cdot b$
 $\frac{1-b}{0-c} = \frac{x}{a} \quad | \cdot a$
 $\frac{1-b}{0-c} \cdot a = x$

$f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$
 In y wird 0 eingesetzt
 $0 = \frac{1}{x-2} + 3$
 Gleichung nach x auflösen.
 $-3 = \frac{1}{x-2}$
 Um $x-2$ aus dem Nenner zu bekommen
 $-3(x-2) = 1$
 Wende das Distributivgesetz an
 $-3x + 6 = 1$
 $-3x = -5$
 $\frac{5}{3} = x$

b) Anleitung zur Berechnung der Nullstelle
~~GPT~~
 1 ~~Man~~ subtrahiert als erster die Konstante
 2 Dann nimmt er den Kehrwert von beiden Seiten
 3 Dann addieren wir die Zahl dazu, mit der x dann
 multipliziert werden kann
 4 Anschließend bekommt GPT das Ergebnis heraus.
 $0 = \frac{1}{x-2} + 3$
 $-3 = \frac{1}{x-2}$
 $-\frac{1}{3} = x-2$
 $x = 2 - \frac{1}{3}$
 Nullstelle = $\frac{5}{3}$

Die Schülerlösung oben links zeigt ein relativ abstraktes Niveau (und weist einen Fehler auf). Unten wird ein allgemein formuliertes „Rezept“ vorgestellt und die Berechnung der Nullstelle des konkreten Beispiels durchgeführt. Oben rechts findet sich eine verkürzte Kopie des Chatverlaufs. Alle in der Unterrichtseinheit erstellten Schülerlösungen lassen sich in eine dieser drei Lösungskategorien einteilen: Abstraktes Niveau mit Parametern, verallgemeinertes Rezept in schriftlicher Form und Chatkopie. Man sieht daran, wie unterschiedlich sich die Schüler*innen vom konkreten Beispiel ablösen, um eine

allgemeingültige Anleitung formulieren zu können (die ja so gar nicht explizit gefragt war). Sämtliche Schülerlösungen und die anschließenden Gespräche zeigten: Die Bearbeitung der Aufgabe war insofern erfolgreich, als dass verstanden wurde, wie man die Nullstelle einer konkreten, einfachen gebrochen-rationalen Funktion bestimmen kann. Die unterschiedlichen Vorschläge sind dann optimale Gesprächsgrundlage, um einen Konsens im Plenum zu finden und eventuelle Fehler und Fehlvorstellungen bei Äquivalenzumformungen anzusprechen.

Fazit: ChatGPT taugt als Tutor, auch weil es die meisten von uns getesteten regelbasierten Äquivalenzumformungen korrekt durchführen kann und der jeweilige Erklärtext hilfreich ist. Auch die Berechnung von Nullstellen quadratischer Funktionen oder allgemeiner Sinusfunktionen schafft ChatGPT mühelos. Das Umrechnen von allgemeiner in Scheitelpunktsform ebenso wie das Aufstellen der Gleichung für eine Tangente oder Normale wurden größtenteils richtig und mit sinnvollen Erklärungen präsentiert.

Im Vergleich zu Lernvideos gibt es ein paar Unterschiede: Während Videos meistens direkt an Schüler*innen gerichtet sind, weiß ChatGPT nicht ohne weitere Informationen, wie der Wissensstand des Fragenden ist, d. h. man müsste der KI mitteilen, in welcher Klassenstufe man sich befindet bzw. auf welchem Niveau man die Aufgabe erklärt bekommen haben will. Man kann daher kleinschrittigere Erklärungen einfordern oder auch dazu auffordern, dass ChatGPT sämtliche Erklärungen weglässt und lediglich Umformungen anzeigt. Die Interaktion ist wegen der Chatfunktion viel höher als beim Betrachten eines Lernvideos. Außerdem lässt sich schnell auf den Button „Regenerate“ klicken, um es mit einer erneuten Erklärung zu versuchen – ein weiteres Video anzuschauen, ist da zeitaufwändiger. Der größte Vorteil (aus Sicht der Lernenden) besteht vielleicht darin, dass ChatGPT genau die Aufgabe erklärt, die vorliegt, ein Video aber allgemein oder an einem anderen Beispiel erklärt. Aus lerntheoretischer Sicht ist Textarbeit nachhaltiger als das Betrachten von Videos – aber auch anstrengender...

Anregung 2: Textarbeit mit ChatGPT

In einer elften Klasse erhielten die Schüler*innen folgenden Auftrag:

Lesen Sie nebenstehenden Chat aufmerksam durch und ...

- a) ... markieren Sie alle für die Begründung irrelevanten Textstellen gelb!
- b) ... unterstreichen Sie die Textstelle, welche die wesentliche Lösungsidee enthält!
- c) ... markieren Sie alle Fehler/fehlerhaften Aussagen rot!
- d) ... notieren Sie fehlende Argumente neben den Chat!
- e) ... überlegen Sie: Bis zu welcher Zeile argumentiert ChatGPT im Wesentlichen korrekt? Führen Sie die Argumentation richtig zu Ende! Nutzen Sie ggf. auch GeoGebra.
- f) ... skizzieren Sie den Graphen der Sinusfunktion und zeichnen Sie den Punkt P ein!

Dabei ging es v. a. darum, im Text (ausgedruckter Chat) einer logischen Begründung auf die Spur zu kommen (die sich in der Tat auch finden lässt). Eine Schülerbearbeitung sehen Sie hier:

$$P(x | \cos(x))$$

$$P(x | y)$$

$$y = m$$

You
 Begründe, ob es auf dem Graphen der Sinusfunktion einen Punkt P gibt, an dem die Steigung des Graphen denselben Wert annimmt wie der y-Wert von P!
 Begründe bitte ausführlich!

ChatGPT
 Um zu überprüfen, ob es auf dem Graphen der Sinusfunktion einen Punkt P gibt, an dem die Steigung des Graphen denselben Wert annimmt wie der y-Wert von P, betrachten wir die Sinusfunktion genauer. Die Sinusfunktion ist periodisch und wechselt zwischen den Werten -1 und 1. Die Steigung des Graphen an einem bestimmten Punkt ist der Anstieg der Tangente an diesem Punkt.

Die allgemeine Form der Sinusfunktion ist:

$$f(x) = A \cdot \sin(Bx + C) + D$$

Dabei repräsentiert A die Amplitude, B die Frequenz (1/Periode) und C eine Phasenverschiebung. In diesem Fall betrachten wir den Standardfall ohne Phasenverschiebung:

$$f(x) = \sin(x)$$

Um zu überprüfen, ob es einen Punkt P gibt, an dem die Steigung des Graphen denselben Wert annimmt wie der y-Wert von P, setzen wir die beiden Gleichungen gleich:

$$f'(x) = f(x)$$

= y-Wert von P

~~allgemeiner~~

Zuerst berechnen wir die Ableitung der Sinusfunktion:

$$f'(x) = \cos(x)$$

Jetzt setzen wir die beiden Gleichungen gleich:

$$\cos(P) = \sin(P)$$

Um zu überprüfen, ob es Lösungen für diese Gleichung gibt, schauen wir uns den Einheitskreis an, da der Sinus und der Kosinus im Einheitskreis geometrisch interpretiert werden können. Im Einheitskreis repräsentiert der Sinus den y-Wert und der Kosinus den x-Wert eines Punktes auf dem Kreis.

$$(x | \cos(x))$$

Wenn $\cos(P) = \sin(P)$ ist, bedeutet dies, dass der Punkt $(\cos(P) | \sin(P))$ auf der Einheitskreislinie liegt. Da der Einheitskreis den Radius 1 hat, ist die Länge des Radius gleich 1. Das bedeutet, dass die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Seitenlängen $\cos(P)$ und $\sin(P)$ ebenfalls 1 ist.

Da $\cos(P)$ und $\sin(P)$ in einem rechtwinkligen Dreieck die Definitionen von Kosinus und Sinus sind, ergibt sich:

$$\cos^2(P) + \sin^2(P) = 1$$

Dies ist die trigonometrische Identität, die immer wahr ist. Daher gibt es immer einen Punkt auf dem Graphen der Sinusfunktion, an dem die Steigung denselben Wert annimmt wie der y-Wert von P, weil dies aufgrund der grundlegenden Trigonometrie und der Eigenschaften des Einheitskreises immer erfüllt ist.

D ist die Verschiebung entl. der y-Achse

Welche „beiden Gleichungen“?

=> 1. Ableitung = y-Koordin.

Anregung 3: ChatGPT als Vorbildungsgeber

Das, was ChatGPT richtig gut kann, ist Texte verfassen. Wohlgeählte Worte unterstützen die Ausprägung von Grundvorstellungen. Schüler*innen einer elften Jahrgangsstufe erhielten folgenden Auftrag:

Geben Sie den folgenden Prompt ein: „Erkläre die Begriffe "Periodenlänge", „Phasenverschiebung“, „Amplitude“ und „Nullstelle“ in Form eines Gedichts!“

Kopieren Sie den Text in ein Textverarbeitungsprogramm und korrigieren Sie ihn so, dass die Begriffe *mathematisch korrekt* verwendet werden!

Uns fiel auf, dass die Schüler*innen Freude an der Aufgabe hatten, es wurde gelacht und gekichert, aber auch gerätselt, ob man diese oder jede Formulierung auch wirklich zählen lassen kann. Sind die Vorstellungen bereits richtig ausgeprägt, so können sich die von ChatGPT hervorgerufenen Vorstellungen befruchtend, erweiternd, vertiefend auf das bestehende Wissen auswirken. Sind die Vorstellungen eher unklar ausgeprägt, kann das Gespräch über die Vorschläge von ChatGPT dazu beitragen, falsche Vorstellungen zu korrigieren.

Hier ein Auszug eines leicht korrigierten Gedichts:

*Die Amplitude, sie ist das Maß der Stärke,
Wie hoch die Welle schwingt, das sind ihre Werke.
Die Nullstelle, wo die Welle schwindet und vergeht,
Dort ist keine Schwingung, das ist der Ort, der steht.
Die Periodenlänge, das ist der Takt,
Wie oft sich die Welle wiederholt, ohne Rast und Rakt.*

Was denken Sie? „Passt“ das Gedicht? An welchen Stellen hätten Sie Gesprächsbedarf? Auf jeden Fall muss man diskutieren bzw. definieren was ein(e) „Rakt“ ist...

Ein ähnlicher Prompt, der interessante Vorstellungen entstehen lässt, ist:

„Erkläre mir die Begriffe Asymptote, Hyperbel, Nullstelle und Polstelle in Form eines Märchens!“

Probieren Sie es doch einfach mal selbst aus...

Stein für Stein zum Erfolg: LEGO-Türme und direkte Proportionalität

Hanna Rauch, Johannes Heinle, Studierende an der Universität Augsburg

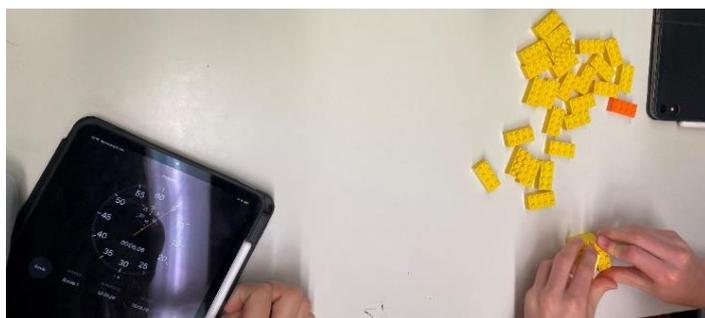
Der bayerische LehrplanPLUS für das Gymnasium fordert für den Mathematikunterricht der achten Klasse die Erreichung folgenden Lernziels:

Die Schülerinnen und Schüler [...] verstehen, dass der Spezialfall einer linearen Funktion mit einer Funktionsgleichung der Form $y = a \cdot x$ als Zuordnung zweier Größen aufgefasst werden kann, die direkt proportional zueinander sind. Diesen Zusammenhang zwischen den beiden Größen erläutern sie an der zugehörigen Ursprungsgeraden und erkennen zueinander direkt proportionale Größen als solche, u. a. im Kontext naturwissenschaftlicher Fragestellungen.

Umgesetzt wird das von Schulbüchern oft damit, dass eine direkte Proportionalität als eine spezielle lineare Funktion mit Definitionsbereich \mathbb{Q} definiert wird (vgl. mathe.delta 8, C.C.Buchner) – was mindestens zweierlei Schwierigkeiten mit sich bringt: Erstens, eine Funktion ist immer etwas „Gerichtetes“, x wird auf $f(x)$ abgebildet, was ja auch im Abbildungspfeil zum Ausdruck kommt ($x \mapsto f(x)$). Dies ist aber bei zwei zueinander direkt proportionalen Größen nicht notwendig der Fall, gerade in naturwissenschaftlichen Kontexten. Es werden eher in einer Situation zwei Größen simultan gemessen. Zweitens, die Definitionsmenge ist in vielen Anwendungsfällen nicht \mathbb{Q} – man denke z. B. an Stückpreise.

Mit Kommiliton*innen sind wir über die Frage ins Gespräch gekommen, wie man denn experimentell auf zwei zueinander direkt proportionale Größen stoßen könnte. Der Gedanke ist: Man misst zwei Größen und trägt die Messtupel in ein Koordinatensystem ein. Diese Punkte liegen dann in etwa auf einer Ursprungsgeraden. Damit hat man eine Herangehensweise, die mehr den vom Lehrplan geforderten „naturwissenschaftlichen Fragestellungen“ entspricht. Im Gespräch entstand dann die Idee, Legotürme zu bauen und die Größen „Zeit“ und „Turmhöhe“ zu messen. Die Stunde wurde im Rahmen des studienbegleitenden Praktikums mehrfach ausprobiert und wird im Folgenden kurz skizziert:

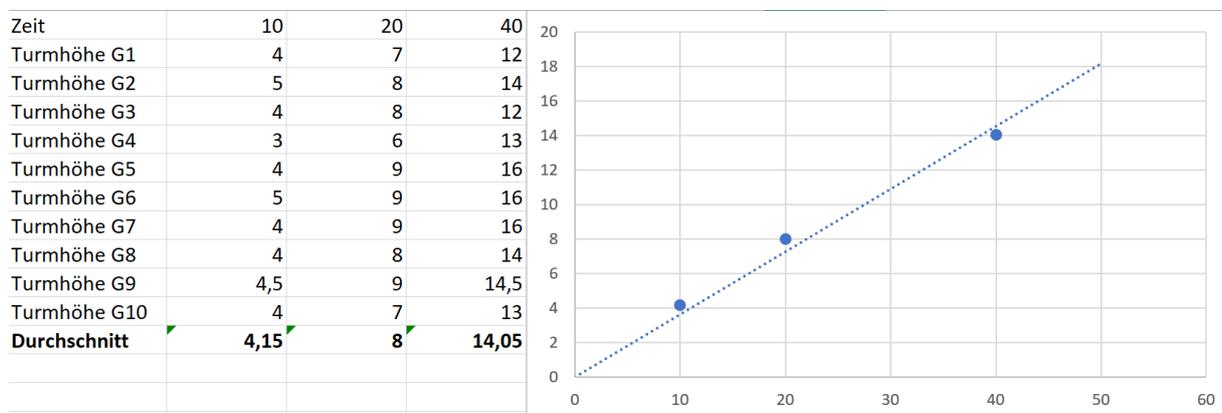
Die Schüler*innen werden in Zweier- und Dreier-Gruppen aufgeteilt und erhalten jeweils



32 Legosteine (à 8 Noppen); das entsprach dem Maximalwert im Selbstexperiment nach 40s (idealerweise sind ein paar Reservesteine zur Verfügung). Zusätzlich wird auf das Smartphone als Stoppuhr zurückgegriffen. Die Schüler*innen erhalten nun den

Arbeitsauftrag, jeweils 10s/20s/30s/40s... lang einen Turm zu bauen und die Höhe des Turms nach dieser Zeit zu notieren.

Die Spielregeln des Turmbauens bezüglich der Form müssen klar kommuniziert werden – in unserem Fall bildeten zwei Legosteine eine Etage. Die notierten Höhen werden zentral in einer Excel-Datei gesammelt, gemittelt und die Mittelwerte bei allen 3 Zeitintervallen dargestellt. Gemeinsam mit den Schüler*innen wird dann erkannt, dass sich die Turmhöhe bei Verdopplung des Zeitintervalls auch verdoppelt bzw. bei Vervielfachung vervierfacht. Dieser Zusammenhang wird nun kurz als direkte Proportionalität eingeführt. Die gemittelten Messwerte werden in ein t-H-Diagramm eingetragen, durch die Punkte wird eine Excel-Trendlinie gelegt. Hier kann man über das Einzeichnen einer Ausgleichsgeraden mit Fehlerbalken prima ins Gespräch kommen. Es ergibt sich eine Ursprungsgerade, die den Verlauf der Punkte gut annähert und diese soll von den Schüler*innen als solche benannt werden:



Zur Erarbeitung der Bedeutung des Proportionalitätsfaktors wird nun die Frage diskutiert, wie lange es dauert, einen Turm zu bauen, der bis zur Decke reicht. Die Schüler*innen stellen im Gespräch fest, dass Wissen über eine „Baugeschwindigkeit“ hilfreich wäre. Hier kann dann direkt der Begriff des Proportionalitätsfaktors thematisiert werden. Außerdem sind die Höhe des Zimmers und die Höhe einer Etage wichtige Eckdaten. Die Schüler*innen erhalten zur Bestimmung dieser Größen Meterstäbe. Dann wird gemeinsam berechnet, wie lange man brauchen würde. Im Anschluss soll der Turm in Klassenarbeit auch tatsächlich gebaut werden.

Die Türme können bei der darauffolgenden Einführung der indirekten Proportionalität wieder aufgegriffen werden. Dies gelingt mit der Fragestellung: „Wie lange würde man mit verschiedener Anzahl an Schüler*innen brauchen den Turm nachzubauen?“ Die Herleitung der Hyperbel-Gleichung mithilfe der Produktgleichheit kann zudem über das Bauen von möglichst vielen verschiedenen Rechtecken mit derselben Anzahl an Legosteinen realisiert werden. Sie sehen: Legosteine sind eine lohnenswerte Anschaffung für die Mathematik-Fachschaft!

Ist das Glas halbleer – oder ist das Glas halb?

Reinhard Oldenburg, Universität Augsburg

Die Anfang Dezember vorgestellten PISA-Ergebnisse haben kurzzeitig für intensive Diskussionen gesorgt. Längst ist das Thema wieder aus den Medien verschwunden, aber als Mathematiklehrkräfte sollten wir uns trotzdem fragen, welche Impulse die Ergebnisse uns geben können. Wie soll man also mit diesen Ergebnissen umgehen, wie einordnen und welche Lehren daraus ziehen? Auf einen Blick in den Berichtsband⁵ kann man unterschiedlich reagieren.

Wenn man sich beruhigen will, argumentiert man so: Fast alle Länder haben Leistungsrückgänge zu verzeichnen, die Schulschließungen dürften daran einen erheblichen Anteil haben und waren in Deutschland länger als in vielen anderen Ländern. Dass die Mathematik darunter stärker gelitten hat als Sprachverständnis und Naturwissenschaften, lässt sich auch erklären: die Inhalte des Mathematikunterrichts bauen viel stärker aufeinander auf als in anderen Fächern, sodass einmal erworbene Lücken sich besonders gravierend auswirken. Die Herausforderungen durch Migration und die vor allem in der Pandemie relevante mangelhafte Digitalisierung sind weitere Erklärungen. Im Mathematikunterricht können wir also im Grunde einfach so weitermachen. Und wenn man genau liest, gibt es im Bericht auch einige positive Dinge: So hält der Berichtsband etwa fest (S. 212), dass in Deutschland überdurchschnittlich viel argumentiert wird, und dass die Kenntnis von Fakten (z.B. des Satzes des Pythagoras) überdurchschnittlich gut ist. Allerdings: Diese Ergebnisse beruhen auf Selbsteinschätzungen der Schülerinnen und Schüler.

Wer sich lieber aufregen mag, hat in der Presse schon ausreichend Vorlagen bekommen: die Leistungsspitze ist in Deutschland auffallend dünn, und am unteren Ende kommen 30% nicht über die erste Kompetenzstufe hinaus. Weniger in der Presse war eine andere Zahl: 40% der Jugendlichen geben an, sich im Mathematikunterricht zu langweilen. Leider wurde nicht erhoben, ob sie sich aus Über- oder Unterforderung langweilen. Zur Langeweile mag auch beitragen, dass sich die Lernenden in Deutschland signifikant schlechter auf die Herausforderungen der Zukunft vorbereitet fühlen.

Diese Erkenntnis kann in der Tat zu einem veränderten Unterricht anregen. Auch eigene Untersuchungen zeigen, dass das Relevanzempfinden in Mathematik sehr gering ausgeprägt ist: Beispielsweise erwarten Erstsemesterstudierende kaum, dass sie das, was sie in der Schule in Mathematik gelernt haben, etwa in Berufen in der Wirtschaft gebrauchen können. Auf den ersten Blick steht das in krassem Widerspruch dazu, dass die meisten aktuellen Schulbücher sehr viele Anwendungsaufgaben beinhalten. Ein kritischer Blick zeigt allerdings, dass viele dieser Aufgaben kaum als authentisch gelten

⁵ https://www.pisa.tum.de/fileadmin/w00bgi/www/Berichtsbaende_und_Zusammenfassungen/pisa-2022-nationaler-bericht-berichtsband.pdf

können, und vielleicht sind unsere Schülerinnen und Schüler so klug, dass sie das erkennen. Es spricht also einiges dafür, lieber etwas weniger, dafür aber authentische und relevante außermathematische Fragestellungen zu behandeln – und im Rest darf es auch mal häufiger innermathematisch sein.

In der öffentlichen Diskussion wurde auch viel über die relativ geringe Digitalisierung in Deutschland gesprochen. Dies war insbesondere in der Pandemie ein Problem. In der aktuellen Lage sollte man aber klar bedenken, dass es zwei Arten von Digitalisierung gibt: zum einen die Digitalisierung der Unterrichtsmedien, wenn also mit Videos statt eines Vortrags der Lehrkraft gelernt wird, oder wenn mit einer Simulation statt einem echten Würfelspiel gearbeitet wird, zum anderen die Digitalisierung der Unterrichtsinhalte, wenn also Phänomene der digitalen Welt wie etwa die künstliche Intelligenz zum Thema gemacht werden. Letzteres passiert in Deutschland bisher so gut wie nicht und könnte damit eine Erklärung geben, dass sich die Jugendlichen schlecht auf die Herausforderungen der Zukunft vorbereitet fühlen. Ersteres wird intensiv gemacht und insbesondere die Nutzung von Erklärvideos dürfte aktuell schon erheblichen Einfluss auf das Lernverhalten haben. Obwohl Videos ein erhebliches Potenzial haben, insbesondere Rechen- und Argumentationsprozesse darzustellen, wage ich die These, dass der Einfluss von Erklärvideos auf die Mathematikleistung bisher negativ war: aktuelle Forschung meines Doktoranden Martin Weckerle bestätigt, dass die Lernenden Erklärvideos vor allem sehr kurzfristig vor Prüfungen konsumieren. Dazu passt, dass die nach Klickzahlen beliebtesten Videos eigentlich gar keine Zusammenhänge und Hintergründe erklären, sondern nur Rezepte vermitteln, was man in welcher Situation tun soll. Der erfolgreiche Youtuber Daniel Jung drückt das in seinen Videos sogar selbst aus mit Sätzen wie „Egal, merkt es euch einfach“⁶, oder „Es kommt nur darauf an, das Muster zu erkennen.“⁷ Wenn die Klausuren so gestellt sind, dass man mit derart schnell angelernten Rezepten zumindest bestehen kann, dann lernen das die Jugendlichen sehr schnell und passen ihr Lernverhalten entsprechend an. Statt langfristigen Kompetenzaufbau ist dann aus ihrer Sicht das zeitökonomisch sinnvolle Verhalten ein Video-Watching-to-the-test. Dass die Lernpsychologie klar sagt, dass so Gelerntes nicht lange im Gedächtnis bleibt, ist vielleicht sogar ein Glück: Viele der Videos enthalten Fehler, die man so schnell wie möglich wieder vergessen sollte. Die Konsequenz für den Unterricht sollte sein, Klausuren so zu stellen (und im Unterricht entsprechend vorzubereiten), dass man mit simplen Rezepten nicht bestehen kann. Man mag sich auch fragen, woher eigentlich der große Wunsch der Lernenden nach Erklärungen kommt, wo es doch Schulbücher und die Erklärung der Lehrkraft gibt. An der Stelle muss man selbstkritisch zur Kenntnis nehmen, dass sich die Jugendlichen in Deutschland signifikant weniger von der Lehrkraft unterstützt fühlen als in anderen Ländern, vielleicht lässt sich auch da etwas tun: Lehrer*innen statt Videos, das verspricht ein besseres Lernen!

Wenn Sie weitere Erklärungen diskutieren wollen, oder Ideen haben, wie der Unterricht konkret verbessert werden kann, lassen Sie es uns wissen – vielleicht entsteht daraus ja ein Beitrag im nächsten *impulse*-Heft.

⁶ Siehe <https://www.youtube.com/watch?v=2Y3obEOE78I>.

⁷ Siehe <https://www.youtube.com/watch?v=5kBSJrMKwTA>.

AuxQuadrat – ein Projekt für Schüler*innen

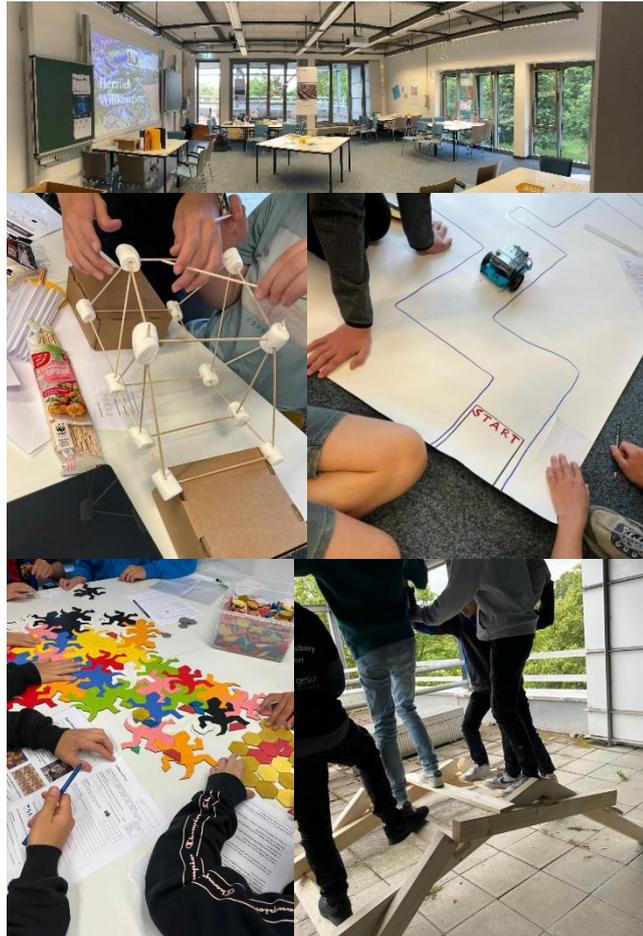
Seit Mitte des Jahres 2023 gibt es ein neues Projekt am Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik: das Aux². Ein Ziel dieses Projekts ist es, Schüler*innen Mathematik auf vielfältige Art und Weise erfahren zu lassen und so das herkömmliche Bild von Mathematik als „Wissenschaft des Rechnens“ aufzubrechen. Hierzu dürfen die Schüler*innen in einem vorbereiteten Seminarraum ca. 90 Minuten an unterschiedlichen Stationen gemeinsam Mathematik erforschen und erleben: Es gilt Brücken zu bauen, Roboter zu programmieren, Parkettierungen zu untersuchen, Symmetrien zu entdecken, dem Zufall auf die Spur zu kommen oder auch beim Knobeln nicht gleich aufzugeben. Daneben soll dieses Projekt aber auch eine Brücke bauen zwischen der Schule und der Universität: Schüler*innen und Lehrer*innen kommen in Kontakt mit der Universität, den dort Lehrenden und Studierenden.

Die einzelnen Stationen sind dabei so konzipiert, dass sie unabhängig sind von Schulart und Jahrgangsstufe: Grundschüler*innen ab der 2. Klasse sowie alle Schüler*innen der weiterführenden Schulen sind herzlich willkommen! Unsere Testläufe im vergangenen Jahr haben gezeigt, dass dies möglich ist. Die begleitenden Lehrkräfte sind dabei eingeladen, mit ihren Schüler*innen gemeinsam zu arbeiten oder aber auch ihre Schüler*innen einfach zu beobachten; Studierende und Lehrende der Universität begleiten die einzelnen Stationen. Wer Interesse daran hat, mit seiner Klasse das Aux² zu besuchen, kann gerne Kontakt mit uns aufnehmen. Wir freuen uns!

Für Informationen und bei Fragen, wenden Sie sich gerne an: ruth.dietl@uni-a.de



Mathematik
erforschen
erkennen
erleben



Bericht über ein Treffen mit Fachbetreuer*innen Mathematik

Im November 2023 fand ein Treffen des Lehrerbildungszentrums der Universität Augsburg mit Schulleitungen Augsburger Gymnasien statt, bei dem der Wunsch nach fachbezogener Kooperation zwischen Universität und Schulpraxis aufkam. Aus diesem Grund fand im Januar 2024 ein Treffen zwischen Kolleg*innen der Augsburger Mathematikdidaktik und Fachbetreuer*innen der Mathematik von Gymnasien in und um Augsburg statt. Nach einer kurzen Vorstellungsrunde präsentierte Prof. Reinhard Oldenburg, welche Verknüpfungspunkte es bereits zwischen dem Lehrstuhl und der Schulpraxis gibt. Neben den Basics wie Schulpraktika und Zulassungsarbeiten der Studierenden wurden Angebote für Lehrkräfte wie der *Tag der Mathematik-Lehrkräfte* und der *GeoGebra-Tag* (siehe *Termine*), das wöchentliche *Oberseminar* bzw. *Kolloquium* des Lehrstuhls und auch die *impulse* präsentiert. Als Angebote für Schüler*innen wurden unter anderem der *Tag der Mathematik* (siehe *Termine*), das *Aux²* (siehe vorherige Seite) und *Rent a Prof* (siehe letzte Seite) vorgestellt. Auch im Bereich der mathematikdidaktischen Forschung gibt es immer wieder Anlässe für Kooperationen mit Lehrkräften, sodass es auch hierzu einige Informationen gab, beispielsweise bezüglich der neuen Vertiefungskurse am Gymnasium, des Relevanz-Empfindens von Mathematik durch Schüler*innen und der Erstellung und dem Einsatz von *GeoGebra Books*. In der anschließenden offenen Diskussionsrunde konnten die Lehrkräfte Wünsche und Überlegungen äußern sowie Nachfragen stellen. Besonderes Interesse zeigten sie am *Aux²* und an den *GeoGebra Books*. Auch die neue *Wissenschaftswoche* im neunjährigen Gymnasium und Erfahrungen mit neuen methodischen Ideen wurden von den Lehrkräften in die Unterhaltung eingebracht. Nicht zuletzt wurden auch Erfahrungen hinsichtlich möglicher Folgen der Schulschließungen durch die Corona-Pandemie ausgetauscht.

Falls auch Sie Lust haben, in der einen oder anderen Form mit uns zu kooperieren, melden Sie sich gerne mit Wünschen, Fragen oder Vorschlägen beim Lehrstuhlteam der Augsburger Mathematikdidaktik.

Literatur-Impuls

Buchbesprechung: Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 4, Springer 2018

von Hans-Stefan Siller, Gilbert Greefrath, Werner Blum

Seit etwa 20 Jahren wird von der Kultusministerkonferenz stark propagiert, im Mathematikunterricht viele Anwendungs- und Modellbildungsaufgaben zu behandeln. Allerdings sind bei weitem nicht alle Aufgaben, die man in Schulbüchern oder Internetquellen findet, besonders gut durchdacht. Häufig handelt es sich um eingekleidete Aufgaben, in denen man nur die eigentliche mathematische Aufgabe herausschälen muss,

indem man überflüssigen Kontext weglässt. Was aber sind gute, authentische Anwendungen und Modellbildungsausgaben? Damit beschäftigt sich seit fast 30 Jahren die ISTRON-Gruppe. Der hier besprochene Sammelband der ISTRON-Schriftreihe ist anlässlich des 25-jährigen Jubiläums erschienen und versammelt im Sinne einer „best-of“-Auswahl „Klassiker“ der Modellbildung. Einige Beispiele seien kurz angerissen: Heinz Boer zeigt anhand der Berechnung des Materialaufwands für die Herstellung einer Einwegmilchtüte, wie man Optimierungsfragestellungen wirklich authentisch behandeln kann. Regina Bruder analysiert verschiedene Verpackungen in Hinblick auf Oberfläche, Volumen und den Anteil der verpackten Produkte am gesamten Volumen. Wolfgang Henn stellt die Änderungsrate in den Mittelpunkt der Behandlung der Differenzial- und Integralrechnung anhand von tatsächlichen Bewegungsvorgängen. Wilfried Herget und Dietmar Scholz bringen eine Vielzahl von interessanten Zeitungsmeldungen, die mathematisch analysiert werden können. Frank Förster stellt die Frage, wie lange das Kabel auf einer Kabeltrommel ist. Das Spannende daran ist, dass man das mit verschiedenen Modellen gut abschätzen kann, ohne das Kabel abwickeln zu müssen. Insgesamt ist der Band eine Fundgrube von authentischen, deswegen allerdings oft auch anspruchsvollen Fragestellungen, die Lernenden in den Sekundarstufen zugänglich sind. Es handelt sich um überzeugende Antworten auf die Frage, wozu man Mathematik eigentlich braucht.

POSITIONS-IMPULS

Mathematik für Demokratie – Stellungnahme der DMV

www.mathematik.de

Folgenden Beitrag findet man unter dem Titel „Wissenschaft verbindet – offener Diskurs und internationale Zusammenarbeit sind unabdingbar“ auf der Website der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV). Er hilft vielleicht, Worte für eine Stellungnahme im Klassenzimmer zu finden:

Die unter dem Motto „Wissenschaft verbindet“ zusammengeschlossenen mathematisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaften sind bestürzt über die antidemokratischen und nationalistischen Ansätze in Deutschland, die einzelne Personen und ganze Gruppen bedrohen und ausgrenzen. Dies schadet dem Wissenschaftsstandort Deutschland. Wissenschaft ist angewiesen auf Weltoffenheit, internationale Zusammenarbeit, Demokratie und Rechtsstaatlichkeit sowie die Freiheit von Forschung und Lehre. Alle Mitglieder der mathematisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaften sind aufgerufen, in ihrem Umfeld ein klares Signal für eine weltoffene, demokratische Gesellschaft und eine freie Wissenschaft zu setzen. Die mathematisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaften – der Dachverband der Geowissenschaften (DVGeo), die Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV), die Deutsche Physikalische Gesellschaft (DPG), die Gesellschaft Deutscher Chemiker (GDCh) und der Verband Biologie, Biowissenschaften und Biomedizin in Deutschland (VBIO) – wehren sich mit ihrer Erklärung gegen nationalistische und antidemokratische Bestrebungen aller

Art. Sie setzen damit ein Signal für Forschungsfreiheit, Demokratie und Rechtsstaatlichkeit sowie Weltoffenheit und internationale Zusammenarbeit. Diese Punkte sind Voraussetzungen für das wissenschaftliche, wirtschaftliche und soziale Wohlergehen unseres Landes – und damit auch für den individuellen Lebensstandard jeder einzelnen Bürgerin und jedes einzelnen Bürgers.

Offene Diskurskultur: Wie die Wissenschaft lebt auch die Gesellschaft vom offenen Diskurs – vom Austausch von Fakten und Argumenten, deren Bewertung und von der Bereitschaft, eigene Ansichten und Hypothesen weiterzuentwickeln, wenn eine veränderte Datenlage es erfordert. Davon ist jedoch in so manchem Diskurs im politisch-gesellschaftlichen Raum derzeit wenig zu spüren: Fakten werden geleugnet oder verfälscht, Narrative orientieren sich an Opportunitäten und Eigeninteressen und der Ton wird rauer und lauter. Die Bereitschaft, eigene Meinungen zu hinterfragen nimmt ab, während Intoleranz und Radikalisierung zunehmen. Für die mathematisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaften ist eine offene und wertschätzende Diskussionskultur unabdingbar. Dies gilt für den allgemeinen Diskurs ebenso wie für den Diskurs in der Wissenschaft. Wissenschaftsfeindlichkeit, Behinderungen der Wissenschaftsfreiheit, Intoleranz und Ausgrenzung beschädigen den Wissenschaftsstandort Deutschland.

Weltoffenheit und internationale Zusammenarbeit: Wissenschaft ist gerade im Kontext von Mathematik und Naturwissenschaften nicht an Ländergrenzen gebunden. Der Austausch von Ideen und Menschen mit unterschiedlichsten Hintergründen und Herangehensweisen wirkt als Triebkraft für Wissenschaft und Erkenntnis, den wir für die Bewältigung der Zukunftsaufgaben dringend benötigen.

Die mathematisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaften warnen daher vor einer Einengung der Wissenschaft auf die nationale Ebene und treten allen Bestrebungen, internationale Zusammenarbeit zu erschweren, entschieden entgegen. Eine rein nationale Wissenschaft würde unserem Land erheblich schaden.

Demokratie und Rechtsstaatlichkeit: Demokratie und Rechtsstaatlichkeit bieten einen verlässlichen Rahmen, in dem Wissenschaft kreativ arbeiten und Ergebnisse liefern kann. Jedes Infragestellen von Demokratie und Rechtsstaatlichkeit sowie jegliche Ausgrenzung gefährdet Forschungsprojekte in Deutschland. Die mathematisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaften warnen vor einer freiwilligen oder erzwungenen Abwanderung von Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern in andere Länder mit besseren Rahmenbedingungen. Das damit verlorengelassene Wissen würde den Forschungsstandort Deutschland schwächen, eine Tatsache, die gerade auch von jenen Akteurinnen und Akteuren billigend in Kauf genommen wird, die ansonsten sehr auf nationale Stärke setzen.

Vor dem skizzierten Hintergrund sind die mathematisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaften alarmiert durch die jüngsten antidemokratischen und nationalistischen Bestrebungen in Deutschland. Sie sind der festen Überzeugung, dass Wohlstand und Stärke eines Landes nicht auf Homogenität beruhen, sondern auf Vielfalt und Freiheit. Die Gesellschaften werden sich auch weiterhin für Forschungsfreiheit, Demokratie und Rechtsstaatlichkeit sowie Weltoffenheit und internationale Zusammenarbeit einsetzen. Sie rufen daher alle ihre Mitglieder auf, in ihrem privaten und gesellschaftlichen Umfeld ein klares Signal für eine weltoffene, demokratische Gesellschaft und eine freie Wissenschaft zu setzen. In diesem Zusammenhang sind die Mitglieder insbesondere auch aufgefordert, die durch das Grundgesetz gewährleisteten demokratischen Rechte z.B. bei Wahlen wahrzunehmen.

Termine und Informationen

Tag der Mathematik für Schülerinnen und Schüler: 02.03.2024

GeoGebra-Tag 2024: 19.03.2024
(Anmeldung über FIBS!)

Mathe-Schüler-Zirkel:

Für Schüler*innen der Jahrgangsstufen 5 bis 13,
die Spaß und Freude an Mathematik haben... Zur Anmeldung:

uni-augsburg.de/de/fakultaet/mntf/math/einricht/mathezirkel/



Rent a Prof:

Buchen Sie eine*n Mathematik-Professor*in für einen Vortrag an
Ihrer Schule zu folgenden Themen: Warum Bienen ein Gespür für
Mathematik haben, Die Mathematik hinter der Bildverarbeitung,
Ist Chaos zufällig?, u.v.m.!

[uni-augsburg.de/de/fakultaet/mntf/math/studium/
studiendekan/rent-a-prof/](https://uni-augsburg.de/de/fakultaet/mntf/math/studium/studiendekan/rent-a-prof/)



impulse digital:

impulse finden Sie auch als digitale Version unter:

[https://www.uni-augsburg.de/de/fakultaet/mntf/math/prof/
dida/impulse/](https://www.uni-augsburg.de/de/fakultaet/mntf/math/prof/dida/impulse/)



Newsletter:

Wenn Sie regelmäßig Informationen erhalten wollen, z. B. zu **Oberseminar-Terminen**,
melden Sie sich gerne per Mail an renate.motzer@uni-a.de