H23-T1-A2

Im folgenden sei S_n die symmetrische Gruppe.

a) Sei $\sigma \in S_n$ ein Produkt $\sigma = \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_m$ von paarweise disjunkten Zyklen ξ_j der Länge l_j. Zeigen Sie, dass die Ordnung von σ gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen von $l_1, \ldots, l_m$ ist.

b) Bestimmen Sie die maximale Ordnung eines Elements

   i) der S_6;

   ii) der S_7.

Lösung

a) Aus der Tatsache, dass disjunkte Zyklen kommutieren folgert man leicht, dass

$$\sigma^l = \prod_{i=1}^{m} \xi_i^l.$$

Es folgt daher $\sigma^l = \text{id} \Leftrightarrow \xi_i^l = \text{id}$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$. Wiederum gilt $\xi_i^l = \text{id}$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\} \Leftrightarrow l_i | l$ für alle $l_i \in \{1, \ldots, m\}$. Man erhält daher, dass $l_i | \text{ord}(\sigma)$ für $i \in \{1, \ldots, m\}$ und deshalb auch $\text{kgV}(l_1, \ldots, l_m) | \text{ord}(\sigma)$.
Andernfalls erhält man aus der Definition des kleinsten gemeinsamen Vielfachen, dass $l_i | \text{kgV}(l_1, \ldots, l_m)$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ und daher $\sigma^{\text{kgV}(l_1, \ldots, l_m)} = 1$, also $\text{ord}(\sigma) | \text{kgV}(l_1, \ldots, l_m)$ und das zeigt die Behauptung.

b) Zunächst erinnern wir daran, dass jede Permutation sich als Produkt von paarweise disjunkten Zyklen schreiben lässt.

   i) Eine Element in S_6 kann folgende Zerlegungstypen (*) haben: (oBdA bis auf Vertauschen der Reihenfolge und ohne Identitäten) (1),(6),(5),(4),(3),(2),(2,2),(2,3),(2,4),(2,2,1),(2,2,2), (3,3). Der größt mögliche kgV ist daher 6.

   ii) In S_7 sind folgende Zerlegungstypen (oBdA bis auf Vertauschen der Reihenfolge und ohne Identitäten) möglich: (1),(7),(6),(5),(4),(3),(2),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5)(2,2,2),(2,2,3),(2,4,1),(3,3),(3,4). Der größt mögliche kgV ist daher 12.

Zu (*): Der Zerlegungstyp von (123)(45)(67) ist (3,2,2)=(2,2,3) in S_7. Der von (23)(56) ist (2,2) in S_7. Der Zerlegungstyp (1,2)=(2), denn bei der Zykelschreibweise werden 1-Zykel gerne weggelassen (das

ist im obigen mit Identitäten gemeint). Im allgemeinen kann es sinnvoll sein, den Zerlegungstyp von beispielsweise (2,3) und (3,2) zu unterscheiden, bei disjunkten Zykeln kann man jedoch darauf verzichten, da die Zykel ohnehin kommutieren.