F24-T2-A3

a) Entscheiden und begründen Sie, ob es eine Gruppe gibt, die außer dem neutralen Element vier Elemente der Ordnung 5, sechs Elemente der Ordnung 2 und keine weiteren Elemente enthält.

b) Entscheiden und begründen Sie, ob es eine abelsche Gruppe gibt, die nur Elemente mit den Ordnungen 1,2 und 4 enhält, wobei die Anzahl der Elemente durch

Ordnung	1	2	4
Anzahl	1	3	12

gegeben ist. Entscheiden Sie begründet, ob die abelsche Gruppe durch diese Angabe bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

c) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Ist G eine endliche Gruppe und d ein Teiler der Gruppenordnung $\#G$, so hat G eine Untergruppe U mit $\#U = d$.

Lösung

a) Wir zählen insegsamt $1 + 4 + 6 = 11$ Elemente. Das ist also eine Gruppe mit Primzahlordnung und deshalb zyklisch. Jedes Element darin, abgesehen vom neutralen Element hat daher die Ordnung 11. Deshalb kann es die beschriebene Gruppe nicht geben.

b) Wir zählen zunächst wieder die Elemente, wir haben insgesamt $1 + 3 + 12 = 16$. Nach dem Haupsatz über endliche abelsche Gruppen und dem chinesichen Restsatz kennen wir folgende abelschen Gruppen mit Ordnung 16, welche paarweise nicht isomorph sind:

$$\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}, \quad (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4, \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2, \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

In $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ gibt es ein Element der Ordnung 16, diese Gruppe fällt also heraus.
In $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ gibt es mindestens 4 Elemente der Ordnung 2, nämlich $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)$ und $(0,0,0,1)$. Diese Gruppe fällt also auch raus.
In $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ gibt es das Element $(0,1)$ das Ordnung 8 hat, diese Gruppe kann es also ebenfalls nicht sein.
In $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ gibt es die Elemente $(1,1,0), (1,0,0), (0,1,0), (1,1,2)$ mit Ordnung 2, also auch mindestens 4 Elemente der Ordnung 2.
Bleibt noch $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$. Hier gilt $\mathrm{ord}((2,0)) = \mathrm{ord}((0,2)) = \mathrm{ord}((2,2)) = 2$. Zudem hat $(0,0)$ natürlich Ordnung 1. Alle anderen 12 Elemente haben Ordnung 4 (Ausprobieren!). $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}^2$ ist also gesuchte Gruppe und nach dem Haupsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen auch eindeutig bis auf Isomorphie.

c) Die Aussage ist falsch. Wir betrachten das Gegenbeispiel A_4 der alternierenden Gruppe mit 4 Elementen. Diese hat $\frac{4!}{2} = 12$ Elemente. Wir wollen zeigen, dass A_4 keine Untergruppe mit 6 Ele-

menten hat. Nehmen wir dazu das Gegenteil an. Sei also H eine Untergruppe mit 6 Elementen. Sei $a \notin H$, dann ist sind die Linksnebenklassen aH und $eH = H$ disjunkt. Da Linksnebenklassen eine Partition von A_4 bilden, und $\#H = \#aH = 6$ gilt, folgt

$$A_4 = aH \cup H.$$

Sei jetzt a ein 3-Zykel (nicht jeder 3-Zykel ist in H!), dann ist entweder $a^2 \in H$ oder $a^2 \in aH$. Wenn $a^2 \in H$ gilt, dann ist $a^4 \in H$ und da $a^3 = \mathrm{id}$ da $\mathrm{ord}(a) = 3$ gilt $a^4 = a \in H$. Das ist ein Widerspruch. Ist jetzt aber $a^2 \in aH$, dann ist $a \in H$, was ebenfalls ein Widerspruch ist. Es kann also kein solches H geben.

Alternative Lösung zu c) Wir betrachten A_5 mit $\frac{5!}{2} = 60$ Elementen. Wir nehmen an, dass A_5 eine Untergruppe U der Ordnung 30 hat. Dann ist der Index $(A_5 : U) = 2$ und demnach U ein nichttrivialer Normalteiler. Das ergibt einen Widerspruch, da A_5 einfach ist.