F23-T3-A1

Es seien G die multiplikative Gruppe $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ und $X = \mathbb{R}^3$ der dreidimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum mit skalarer Multiplikation

$$\mathbb{R} \times X \to X, (\lambda, x) \mapsto \lambda x.$$

Weiter sei die folgende Abbildung gegeben:

$$\cdot : G \times X \to X, (g, x) \mapsto g \cdot x := gx$$

(das ist die skalare Multiplikation, eingeschränkt auf $G \times X$).

a) Zeigen Sie, dass $\cdot$ eine Operation von G auf X ist.

b) Bestimmen Sie die Menge F der Fixpunkte der Operation.

c) Zeigen Sie, dass $R = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\} \cup \{0\}$ ein Repräsentantensystem der Bahnen der Operation ist.

Lösungsvorschlag. Zu a). Es gilt unter Verwendung der üblichen Rechenregeln der Skalarmultiplikation

$$1 \cdot \mathbf{x} = 1\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

und

$$g \cdot (h \cdot \mathbf{x}) = g \cdot h\mathbf{x} = g(h\mathbf{x}) = (gh)\mathbf{x} = (gh) \cdot \mathbf{x}.$$

Zu b). Ein Fixpunkt $\mathbf{x} \in X$ ist ein Punkt, der $g \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ für alle $g \in G$ erfüllt. Es ist $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ ein Fixpunkt, denn es gilt offensichtlich $g \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ für alle $g \in G$. Tatsächlich ist dies der einzige Fixpunkt, denn für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ und ein $g \in G$ mit $g \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ folgt $g = 1$.
Zu c). Wir wollen zeigen, dass die Bahnen der Repräsentanten eine disjunkte Zerlegung von X bilden und beginnen damit, dass es sich hierbei tatsächlich um eine Zerlegung handelt:
Es ist $\mathbf{0} \in G \cdot \mathbf{0} = \{\mathbf{0}\}$. Für $\mathbf{v} \in X, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ist $\mathbf{x} := \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} \in R$ ein Repräsentant und man sieht leicht

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \cdot \mathbf{x} \in G \cdot \mathbf{x} = \{g \cdot \mathbf{x} \mid g \in G\}.$$

Zur Disjunktheit stellen wir fest: Die Bahn $G \cdot \mathbf{0} = \{\mathbf{0}\}$ ist disjunkt zu den Bahnen der anderen Repräsentanten, da $g > 0$. Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R \setminus \{\mathbf{0}\}$ betrachte $\mathbf{v} \in G \cdot \mathbf{x} \cap G \cdot \mathbf{y}$. D.h. es existieren $g, h \in G$ mit $\mathbf{v} = g \cdot \mathbf{x} = h \cdot \mathbf{y}$. Daraus folgt

$$|g| = |g| \cdot \|\mathbf{x}\| = \|g \cdot \mathbf{x}\| = \|h \cdot \mathbf{y}\| = |h| \cdot \|\mathbf{y}\| = |h|$$

und wegen $g, h > 0$ sogar $g = h$. Damit erhalten wir $\mathbf{v} = g\mathbf{x} = g\mathbf{y}$ und letztendlich $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.