H25-T1-A1

Es sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Eine quadratische $(n \times n)$-Matrix $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ heißt *nilpotent*, wenn ein $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $B^k = 0$ existiert. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Nil}_n(\mathbb{C})$ die Teilmenge der nilpotenten Matrizen in $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$.

a) Begründen Sie, warum eine nilpotente Matrix $B \in \mathrm{Nil}_n(\mathbb{C})$ nur den Eigenwert 0 hat. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_B(X) \in \mathbb{C}[X]$ für $B \in \mathrm{Nil}_n(\mathbb{C})$.

b) Die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ operiert auf der Menge $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ durch Konjugation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), (A, B) \mapsto ABA^{-1}$. Dies dürfen Sie ohne Beweis benutzen. Zeigen Sie, dass diese Operation eine Operation von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ auf der Teilmenge $\mathrm{Nil}_n(\mathbb{C})$ induziert.

c) Bestimmen Sie für $n := 4$ mit Hilfe der Jordanschen Normalform die Anzahl der Bahnen für die in b) angegebene Operation der Gruppe $\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ auf der Menge $\mathrm{Nil}_4(\mathbb{C})$.

Lösung

a) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $B \in \mathrm{Nil}_n(\mathbb{C})$. Demnach existiert ein $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ mit $Bv = \lambda v$. Nach Voraussetzung existiert ein minimales $k \in \mathbb{N}_{\geq 1} : B^k = 0$. Eine einfache Induktion zeigt, dass $B^k v = \lambda^k v$. Da $B^k = 0$ folgt demnach $B^k v = \lambda^k v = 0$ und aus $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ folgt $\lambda^k = 0$ und damit $\lambda = 0$. Demnach kann nur 0 ein Eigenwert von B sein. Dieser wird auch angenommen, denn es existiert ein $j \in \{1, \dots, n\}$ sodass $B^{k-1} e_j \neq 0$, denn angenommen nicht, dann wäre B^{k-1} die Nullmatrix, ein Widerspruch zur Definition von k. $B \cdot B^{k-1} e_j = B^k e_j = 0 = 0 \cdot B$. Demnach gibt es einen passenden Eigenvektor zum Eigenwert v. Da das charakteristische Polynom einer $n \times n$-Matrix mit Einträgen in $\mathbb{C}$ ein normiertes (bei geeigneter Setzung also: $\chi_A(X) = \det(X \cdot I - A)$) Polynom vom Grad n ist dessen Nullstellen genau die Eigenwerte der Matirx A sind. Demnach gilt für alle $B \in \mathrm{Nil}_n(\mathbb{C})$, dass $\chi_B(X) = X^n$. Bei der Setzung $\chi_A(X) = \det(A - X \cdot I)$, bekäme man $\chi_B(X) = (-1)^n X^n$ für alle $B \in \mathrm{Nil}_n(\mathbb{C})$.

b) Wir schränken die Operation auf $\mathrm{Nil}_n(\mathbb{C})$ ein, und wollen zeigen, dass diese dann immer noch wohldefiniert wird, d.h. wir müssen zeigen $\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), B \in \mathrm{Nil}_n(C) : \quad ABA^{-1} \in \mathrm{Nil}_n(\mathbb{C})$. Dafür zeigen wir zunächst, dass für alle $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), (ABA^{-1})^k = AB^kA^{-1}$ gilt. Dies gilt offenbar für $k = 1$. Gelte es nun für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann gitl $(ABA^{-1})^{k+1} = (ABA^{-1})^k (ABA^{-1}) = AB^kA^{-1}(ABA^{-1}) = AB^{k+1}A^{-1}$. Das zeigt die Behauptung. Sei nun B nilpotent mit minimalen $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sodass $B^k = 0$, dann gilt $(ABA^{-1})^k = AB^kA^{-1} = 0$, demnach ist $ABA^{-1} \in \mathrm{Nil}_n(\mathbb{C})$.

c) Aus a) wissen wir, dass ein $B \in \mathrm{Nil}_4(\mathbb{C})$ nur den Eigenwert 0 hat. Demnach kommen für B nur die folgenden 5 Jordannormalformen in Frage:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demnach gibt es genau 5 Bahnen für die Operation aus b).