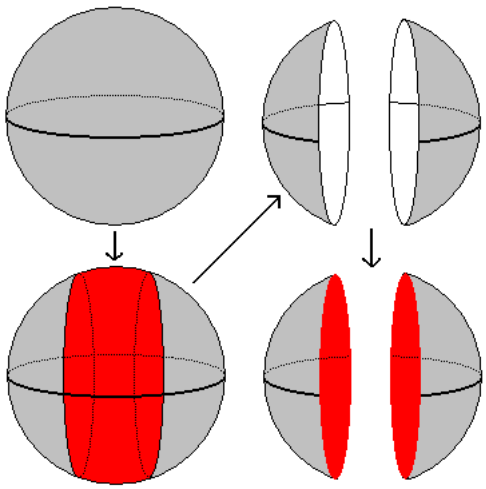
Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-
Technische Fakultät

Prof. Dr. Wolfgang Steimle

Master-Vorlesung im Sommersemester 2016
Klassifikation von Mannigfaltigkeiten



Eine der zentralen Fragen in der Theorie der Mannigfaltigkeiten ist die Frage nach der *Klassifikation*. Dabei sucht man nach Kriterien, an denen man erkennen kann, ob zwei gegebene glatte (typischerweise geschlossene) Mannigfaltigkeiten diffeomorph sind, ohne dass explizit ein Diffeomorphismus konstruiert werden muss. Bekanntestes Beispiel ist der Satz, dass zwei geschlossene und orientierbare Flächen automatisch diffeomorph sind, wenn sie nur dieselbe Euler-Charakteristik haben. Ein weiteres Beispiel ist die berühmte *Poincaré-Vermutung*, die fast 100 Jahre lang offen war und Anfang der 2000er durch Perelman bewiesen wurde: Sie besagt, dass eine glatte geschlossene 3-Mannigfaltigkeit bereits diffeomorph zur Sphäre ist, falls sie nur den Homotopietyp einer Sphäre hat.

Die analoge Vermutung in Dimension 4 ist bis heute offen. Interessanterweise ist dagegen die Klassifikation von Homotopiesphären in Dimensionen ≥ 5 bereits seit den Arbeiten von Smale, Kervaire und Milnor in den 1960er Jahren bekannt. Zum Beispiel gibt es in Dimension 7 im Wesentlichen 28 verschiedene orientierte Mannigfaltigkeiten vom Homotopietyp einer Sphäre.

Ziel der Vorlesung ist es, wichtige Techniken und Resultate aus der Klassifikation von Mannigfaltigkeiten kennen zu lernen. Eine wichtige Rolle spielt hierbei die *Chirurgie*, eine Methode, mit der man durch „Ausschneiden und Ankleben“ kontrolliert Mannigfaltigkeiten verändern kann.

Als Vorkenntnisse werden Grundkenntnisse in der Differentialtopologie vorausgesetzt. Abgesehen davon wird sich das Tempo der Vorlesung wesentlich am Hintergrund der Hörerschaft orientieren.