H24-T1-A1

Sei H die Menge der reellen 2×2- Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

mit $a^2 + b^2 \neq 0$.

a) Zeigen Sie, dass H eine Untergruppe der Gruppe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ der invertierbaren 2×2- Matrizen ist.

b) Seien $A, B, C \in H$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $AYB = C$ eine eindeutige Lösung Y in H hat.

c) Lösen Sie die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung

a) Offensichtlich gilt $H \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. Wir bezeichnen mit E_2 die 2×2- Einheitsmatrix. Es gilt $\det(E_2) = 1 \neq 0$. Demnach ist $E_2 \in H$. Seien $A, B \in H$, also

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{und } B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}.$$

Es gilt $AB = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{pmatrix}$ und demnach $\det(AB) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \neq 0$, denn angenommen doch, dann gilt $ac = bd$ und $ad = -bc$. Wir betrachten die Fälle $c \neq 0$ und $c = 0$. Falls $c = 0$, dann gilt $bd = 0$ und $ad = 0$.Da $\mathbb{R}$ ein Körper ist, folgt entweder $d = 0$ oder $a = b = 0$. Falls $d = 0$ dann giilt $\det(B) = 0$ ein Widerspruch. Sind $a, b = 0$ so gilt $\det(A) = 0$ was auch einen Widerspruch liefert. Demnach wäre $\det(AB) \neq 0$. Im Fall $c \neq 0$ ist $c \in \mathbb{R}$ invertierbar. Demnach folgt aus $ac = bd$, dass $a = \frac{bd}{c}$. Setzt man das in die Gleichung $ad = -bc$ ein, so erhält man $\frac{bd^2}{c} = -bc$. Weiter also $bd^2 = -bc^2$. Hieraus folgt $b = 0$ oder $d^2 = c^2$. Falls $b^2 = -c^2$, dann wäre $\det(B) = 0$ - Widerspruch. Ist $b = 0$, dann gilt $ac = bd = 0$ und da $c \neq 0$ folgt $a = 0$. Und aus $a = 0 = b$ folgt $\det(A) = 0$, also erneut ein Widerspruch. Wir haben also gezeigt, dass $\det(AB) \neq 0$ und demnach $AB \in H$. Mit der bekannten Regel für die Inverse einer 2×2- Matrix, sieht man

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

und demnach $A^{-1} \in H$. Demnach ist H eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.

b) Da $A, B \in H \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, existieren eindeutige Inverse A^{-1} und B^{-1}. Demnach ist die Gleichung $AYB = C$ äquivalent zu $Y = A^{-1}CB^{-1}$. Demnach ist $Y = A^{-1}CB^{-1}$ die eindeutige Lösung der Ausgangsgleichung. Mit den Axiomen einer Untergruppe folgt zudem schnell, dass $Y \in H$.

c) Wir lösen die Gleichung wie in b) beschrieben. Wir berechnen daher zunächst die Inversen:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also $Y = \frac{1}{1000}\begin{pmatrix} 96 & 28 \\ -28 & 96 \end{pmatrix}$.