F25-T3-A5

Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, und sei $N_K : K \to \mathbb{Q}$ die Normabbildung, die gegeben ist durch $N_K(a + b\sqrt{3}) = a^2 - 3b^2$ für $a, b \in \mathbb{Q}$.

a) Beweisen Sie, dass es zu $x \in R$ und $y \in R \setminus \{0\}$ ein Element $q \in R$ gibt mit $\left|N_K(\frac{x}{y}.q\right| < 1$.
Hinweis: Schreiben Sie $\frac{x}{y}$ in der Form $a + b\sqrt{3}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$.

b) Sei $N_R : R \to \mathbb{Z}$ die Einschränkung der Abbildung N_K. Zeigen Sie, dass R bezüglich der Abbildung $|N_R|$ ein euklidischer Ring ist, d.h. zu zwei Elementen $x, y \in R$ mit $y \neq 0$ gibt es Elemente $q, r \in R$ mit $x = qy + r$ und $|N_R(r)| < |N_R(y)|$.

Lösung

a) Wir folgen dem Hinweis. Sei also $x = m + n\sqrt{3}$ und $y = r + s\sqrt{3} \neq 0$ mit $m, n, r, s \in \mathbb{Z}$. Wir benutzen die Partialbruchzerlegung. Hierzu erweitern wir $\frac{x}{y}$ mit $r - s\sqrt{3}$. Nach leichten Rechnungen folgt

$$\frac{x}{y} = \frac{mr - 3ns}{r^2 - 3s^2} + \frac{nr - ms}{r^2 - 3s^2}\sqrt{3}.$$

Demnach gilt für $q = c + d\sqrt{3} \in R$ mit $c, d \in \mathbb{Z}$

$$\frac{x}{y} - q = \frac{mr - 3ns}{r^2 - 3s^2} - c + (\frac{nr - ms}{r^2 - 3s^2} - d)\sqrt{3}.$$

Es gilt also $N_K\left(\frac{x}{y} - q\right) = \left(\frac{mr-3ns}{r^2-3s^2} - c\right)^2 - 3\left(\frac{nr-ms}{r^2-3s^2} - d\right)^2$. Wir fordern nun

$$\left|\left(\frac{mr - 3ns}{r^2 - 3s^2} - c\right)^2 - 3\left(\frac{nr - ms}{r^2 - 3s^2} - d\right)^2\right| < 1.$$

Wir wählen für c die nächstgelegene ganze Zahl α zu $\left(\frac{mr-3ns}{r^2-3s^2}\right)$ und für d die nächstgelegene ganze Zahl β zu $\left(\frac{nr-ms}{r^2-3s^2}\right)$. Dann gilt $|\alpha - c| \leq \frac{1}{2}$ und $|\beta - d| \leq \frac{1}{2}$. Damit erhalten wir

$$\left|\left(\frac{mr - 3ns}{r^2 - 3s^2} - c\right)^2 - 3\left(\frac{nr - ms}{r^2 - 3s^2} - d\right)^2\right| \leq 1.$$

Angenommen $N_K(\frac{x}{y} - (c + d\sqrt{3}) = 1$ mit den oben gewählten $c, d \in \mathbb{Z}$. Dann „wackeln“wir an den Werten und nehmen $c' = c \pm 1$ und $d' = d \pm 1$.

b) Hierzu benutzen wir a). Seien also $x, y \in R$ mit $y \neq 0$. Nach a) gibt es $q \in R$ mit $\left|N_K\left(\frac{x}{y} - q\right)\right| < 1$. Da die Norm multiplikativ ist gilt $|N_K(x - qy)| < |N_K(y)|$. Da $x - qy, y \in R$ können wir auch N_R schreiben. Wir schreiben nun $x = qy + r$ mit $r = x - qy$. Das zeigt die Behauptung.