F23-T3-A5

Für einen kommutativen Ring R definieren wir $S(R) = \{r_1^2 + r_2^2 \mid r_1, r_2 \in R\}$.

a) Zeigen Sie: Sind $r, r' \in S(R)$, dann gilt auch $rr' \in S(R)$.

b) Bekanntlich sind die normierten irreduziblen Polynome in $\mathbb{R}[X]$ genau die Polynome der Form $X - r$ oder $(X - a)^2 + b^2$ mit $r, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}_{>0}$.
Zeigen Sie: $S(\mathbb{R}[X]) = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \forall \xi \in \mathbb{R} : f(\xi) \geq 0\}$.

Lösungsvorschlag. Zu a). Seien $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$ mit $r = x_1^2 + x_2^2$ und $r' = y_1^2 + y_2^2$. Es folgt:

$$\begin{aligned} rr' &= (x_1^2 + x_2^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2) = x_1^2 y_1^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 \\ &= x_1^2 x_2^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 + x_2^2 y_1^2 \\ &= (\underbrace{x_1 x_2 + y_1 y_2}_{\in R})^2 + (\underbrace{x_1 y_2 - x_2 y_1}_{\in R})^2 \in S(R). \end{aligned}$$

Zu b). Wir zeigen die Aussage mit doppelter Inklusion.

„$\subseteq$“ Für $f \in \mathbb{R}[X]$ existieren $g_1, g_2 \in \mathbb{R}[X]$ mit $f = g_1^2 + g_2^2$, also folgt

$$f(\xi) = \underbrace{g_1(\xi)^2}_{\geq 0} + \underbrace{g_2(\xi)^2}_{\geq 0} \geq 0$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}$.

„$\supseteq$“ Sei also $f \in \mathbb{R}[X]$ mit $f(\xi) \geq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Zerlegung

$$f = s \cdot g_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot g_n^{k_n}$$

in paarweise verschiedene, irreduzible Elemente $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{R}[X]$ und $s \in \mathbb{R}$. Falls g_i von der Form $(X - a)^2 + b^2$ für $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}_{>0}$ ist, sieht man direkt

$$g_i = (\underbrace{X - a}_{\in \mathbb{R}[X]})^2 + (\underbrace{b}_{\in \mathbb{R}[X]})^2 \in S(\mathbb{R}[X]).$$

Falls g_i von der Form $X - r$ für $r \in \mathbb{R}$ ist muss k_i gerade sein, denn andernfalls hat f bei r eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, im Widerspruch zu $f(\xi) \geq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$. Auch hier sehen wir also

$$g_i = (\underbrace{(X - r)^{k_i/2}}_{\in \mathbb{R}[X]})^2 + \underbrace{0}_{\in \mathbb{R}[X]}{}^2 \in S(\mathbb{R}[X]).$$

Der Faktor s muss ebenfalls wegen $f(\xi) \geq 0$ und $g_i(\xi) \geq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ positiv sein, sodass $s = \sqrt{s}^2 + 0^2 \in S(\mathbb{R}[X])$. Es liegen also alle Faktoren von f in $S(\mathbb{R}[X])$ und damit nach Teilaufgabe a) auch f selbst.