

Philosophie der Mathematik

1. Thema: Unendlichkeit (Ontologie)

Das Unendliche ist in der Geistesgeschichte vielfach auf Widerstand gestoßen, hauptsächlich, weil Unendlichkeit für uns Menschen schwer zu erfassen ist.

Im **mathematischen Realismus** wird Unendlichkeit akzeptiert, obwohl es logisch gesehen nicht notwendig ist (man kann auch Finitist sein und mathematischer Realist). Umgekehrt gilt: Akzeptieren wir die Unendlichkeit, müssen wir notwendigerweise den mathematischen Realismus annehmen, da wir endliche Wesen sind (und wir Unendlichkeit nicht „erschaffen“, sondern nur partiell erfassen können).

Modi des Unendlichen	1	Potenzielle Unendlichkeit	Eigentlich aktual endlich, aber Endliches kann unbegrenzt vergrößert werden (Konstruktivismus)
	2	Aktuale Unendlichkeit	Unendlichkeit existiert wirklich (Realismus)

Arten des Unendlichen (im Modus des aktual Unendlichen)	1	Unendlich viele	z. B. unendlich viele Natürliche Zahlen (Plural!)
	2.a	Unendlich groß der Anzahl der Konstituenten nach	z. B. Menge der Natürlichen Zahlen (Singular!); Reelle Zahlen mit einer unendlich langen Dezimalfolge
	2.b	Unendlich groß der Quantität nach	z. B. hinsichtlich der räumlichen Ausdehnung (bspw. des Weltalls)

Eigenart des Unendlichen	Unendlich klein	Infinitesimale: Das unendlich Kleine kann durch eine unendlich lange Teilungssequenz dargestellt werden
---------------------------------	-----------------	---

Abzählbar vs. überabzählbar unendlich	1	Abzählbar Unendliches	z. B. Menge der Natürlichen Zahlen, Menge der Primzahlen (Mächtigkeit = Aleph 0)
	2	Überabzählbar Unendliches	z. B. Menge der Reellen Zahlen (Mächtigkeit = Aleph 1)

Georg Cantor: Unterschiedliche Mächtigkeiten der Mengen der Natürlichen und Reellen Zahlen (Beweis über zweites Diagonalverfahren).

Verschiedene Positionen:

1. Radikaler Finitismus (es gibt keine Unendlichkeit)
2. Moderater Finitismus (potenziell Unendliches wird anerkannt)
3. Moderater Infinitismus (aktual unendlich Vieles wird anerkannt)
4. Radikaler Infinitismus (aktual unendlich Vieles und Großes wird anerkannt)

2. Thema: Limitierungssätze (Epistemologie)

Formalismus:	Radikaler Formalismus:	Differenzierter Formalismus (David Hilbert als der prominenteste Vertreter):
Geht davon aus, dass die Mathematik die Wissenschaft formaler, konsistenter Deduktionssysteme ist.	Mathematischen Aussagen haben keine Bedeutung, ihnen kommt kein Wahrheitswert zu.	Sätze der finiten Mathematik beziehen sich auf konkrete, endliche mathematische Objekte (Realismus). Ein radikaler Formalismus gilt nur für die Sätze der transfiniten Mathematik, da unendliche mathematische Objekte nicht existieren.

Hilbertprogramm: Ziel des von David Hilbert in den 1920er Jahren vorgeschlagenen Programms war es, alle mathematischen Theorien zu formalisieren und mit finiten Methoden nachzuweisen, dass diese Formalisierungen vollständig, widerspruchsfrei und entscheidbar sind.

2.1 Gödelscher Unvollständigkeitssatz

Kurt Gödel ließ 1931 Hilberts Träume mit seinen Unvollständigkeitssätzen platzen:

1. Unvollständigkeitssatz:	2. Unvollständigkeitssatz:
Jedes formale System, das stark genug ist, die elementare Arithmetik zu formalisieren, ist entweder widersprüchlich oder unvollständig.	Ein solches formales System kann die eigene Widerspruchsfreiheit nicht beweisen.

Daraus folgt: Die Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit der Peano-Arithmetik lässt sich nicht mit Methoden der finiten Mathematik beweisen.

2.2 Entscheidungsproblem

David Hilbert/Wilhelm Ackermann: Gibt es einen Algorithmus, der für jede formalisierte Aussage der Mathematik entscheidet, ob diese wahr oder falsch ist?

Mechanisches Entscheidungsverfahren: Nach endlich vielen mechanischen Schritten kommt die Antwort „ja“ oder „nein“ heraus.

Alonzo Church und Alan Turing konnten 1936 unabhängig voneinander zeigen, dass es keine allgemeine Lösung für das Entscheidungsproblem gibt: Beispielsweise gibt es für die Aussagenlogik ein mechanisches Entscheidungsverfahren (Methode der Wahrheitstafeln). Das gilt jedoch nicht für die elementare Prädikatenlogik: Mithilfe eines mechanischen Entscheidungsverfahrens kann nicht überprüft werden, ob ein Satz der prädikatenlogischen Symbolsprache wahr ist oder nicht.

Fazit: Mathematische Erkenntnis stößt immer wieder an ihre Grenzen.

Verwendete Quellen und Literatur:

Meixner, Uwe: Vorlesung Philosophie der Mathematik. Wintersemester 2021/22.

Neunhäuserer, Jörg (2021): Einführung in die Philosophie der Mathematik. 2. Aufl. 2021. Berlin, Heidelberg: Springer.