## H25-T3-A5

Es sei $b \in \mathbb{N}$ und $b \geq 2$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ existieren eindeutig bestimmte $r_0, r_1, r_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ mit $|\{i \in \mathbb{N}_0 \,:\, r_i \neq 0\}| < \infty$ und $n = \sum_{i=0}^{\infty} r_i b^i$. Man nennt $n = \sum_{i=0}^{\infty} r_i b^i$ die *b-adische Entwicklung von n*. Dies dürfen Sie ohne weiteren Beweis benutzen. Im Folgenden sei stets $n \in \mathbb{N}_0$ mit $b$-adischer Entwicklung $n = \sum_{i=0}^{\infty} r_i b^i$.

a) Es sei $d \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 2$, und es gelte $d \mid b^j$ für ein $j \in \mathbb{N}_0$ und $d \nmid b^i$ für alle $i < j$. Zeigen Sie:

   i) genau dann gilt $d \mid n$, wenn $d \mid \sum_{i=0}^{j-1} r_i b^i$ gilt;

   ii) im Fall $d = b^j$ gilt genau dann $d \mid n$, wenn $r_0 = \cdots = r_{j-1} = 0$ gilt.

b) Es sei $d \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 2$ und $d \mid b - 1$.

   i) Zeigen Sie, dass $n \equiv \sum_{i=0}^{\infty} r_i (\bmod d)$ ist.

   ii) Bestimmen Sie das eindeutige $m \in \{0, \ldots, 8\}$ mit $154421643 \equiv m (\bmod 9)$.

**Lösung**

a) Es gelte $d \mid b^j$. Somit $d \mid b^k$ für alle $k \geq j$

   i) Aus $d \mid \sum_{i=0}^{j-1}$ folgt also $d \mid n$ $(d \mid a \wedge d \mid b \Leftarrow d \mid (a+b))$.
   Sei nun $modulon0d \iff d \mid n \iff \sum_{i=0}^{\infty} r_i b^i \equiv 0 (\bmod d)$ und da $b^k \equiv 0 (\bmod d)$ für alle $k \geq j$ folgt $\sum_{i=0}^{j-1} r_i b^i \equiv 0 (\bmod d)$ was zu zeigen war.

   ii) Sei also $d = b^j$, das heißt wir dürfen unter anderem a) benutzen.
   Sein nun $r_0 = \cdots = r_{j-1} = 0$ dann gilt $n = \sum_{i=j}^{\infty} r_i b^i$ und da $b^j \mid b^k$ für alle $k \geq j$ folgt dass $b^j \mid n$.
   Für die andere Richtung setzen wir wieder an $n \equiv 0 (\bmod b^j)$ was nach i) äquivalent ist zu $\sum_{i=0}^{j-1} r_i b^i \equiv 0 (\bmod b^j)$. Multiplizieren wir diese Gleichung mit $b^{j-1}$ erhalten wir $r_0 b^{j-1} \equiv 0 (\bmod b^j)$ und da $0 \leq r_0 \leq b-1$ und $b^{j-1} \neq 0$ folgt $r_0 = 0$. So verfahren wir analog weiter und erhalten damit die Aussage.

b) i) Es gilt $b - 1 \equiv 0 (\bmod d) \iff b \equiv 1 (\bmod d)$ also $n = \sum_{i=0}^{\infty} r_i b^i \equiv \sum_{i=0}^{\infty} r_i (\bmod d)$.

   ii) Setze $b = 10$ demnach ist $b - 1 = 9 = d$. Die 10-adische Entwicklung von 154421643 ist sie selbst. Nach b) i) müssen wir also nur die Quersumme bilden und modulo 9 rechnen. Man erhält $m = 3$.