H24-T3-A3

Sei $f = X^{2024} + 2024 \in \mathbb{Z}[X]$. Wir definieren die Iterierten von f also $f_0 = X$ und $f_{n+1} = f(f_n) = f_n^{2024} + 2024$ für $n \geq 0$. Zeigen Sie:

a) f ist irreduzibel.

b) Für alle $n \geq 1$ gilt $f_n(0) \equiv 2024 \bmod 2024^2$.

c) f_n ist irreduzibel für alle $n \geq 0$.

Lösung

a) f ist irreduzibel nach Eisenstein für $p = 11$, da $p \mid 2024$ aber $11^2 = 121 \nmid 2024$.

b) Wir zeigen das per Induktion.

I.A.: $f_1(0) \equiv 2024 \bmod 2024^2$ ist erfüllt.

I.S.: Gelte die Aussage für f_n. Da $(2024)^{2024} = ((2024)^2)^1012$ gilt $2024^{2024} \equiv 0 \bmod 2024^2$. Demnach gilt $f_{n+1}(0) \equiv f(f_n(0))2024^{2024} + 2024 \equiv 2024 \bmod 2024^2$.

c) Für $n = 0$ sieht man leicht, dass $f_n = X$ irreduzibel ist. Wir zeigen zunächst für alle $n \geq 1$, dass $[f_n(x)] = X^{2024^n} \in \mathbb{Z}/2024\mathbb{Z}[X]$.

I.A.: Ist klar für $n = 1$.

I.S.: Es gilt $[f_{n+1}(X)] = [f(f_n(X))] \overset{\text{I.V.}}{=} f([X^{2024^n}]) = [X^{2024^{n+1}}]$. Wir erhalten also, dass 2024 alle Koeffizienten von f_n für $n \geq 1$ teilt außer den führenden und demnach auch die Primzahlen 11 und 23. Nach b) wissen wir, dass 2024^2 nicht den freien Term von f_n teilt. Wir wissen sogar $f_n(0) \equiv 2024 \bmod 2024^2$. Demnach gilt $f_n(0) \equiv 2024 \equiv 88 \bmod 11^2$. Also teilt 11^2 nicht $f_n(0)$. Demnach ist f_n für $n \geq 1$ irreduzibel nach Eisenstein mit $p = 11$.