F24-T2-A4

a) Entscheiden Sie begründet, ob ein Ring R existiert, der unendlich viele Einheiten $u \in R^\times$ endlicher multiplikativer Ordnung hat. (D.h. $\text{ord}_{R^\times}(u) < \infty$.)

b) Entscheiden Sie begründet, ob ein Ring R existiert, der unendlich viele Einheiten $u \in R^\times$ endlicher additiver Ordnung hat. (D.h. $\text{ord}_{R,+}(u) < \infty$.)

c) Entscheiden Sie begründet ob ein Ring R existiert, der nur endlich viele Einheiten hat und in dem die multiplikative Ordnung einer Einheit $u \in R^\times$ unendlich ist. (D.h. $\text{ord}_{R^\times}(u) = \infty$).

Lösung

a) Wir betrachten den Polynomring in unendlich vielen Variablen über dem Körper $\mathbb{Q}$, $R := \mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots]$ und teilen das Ideal erzeugt von $(x_1^2 - 1, x_2^2 - 1, \ldots)$ heraus, dann gilt für jedes x_i, dass $x_i^2 = 1$ und damit gibt es unendlich viele Einheiten von Ordnung 2.

b) Wir betrachten den Ring $R := \mathbb{F}_p(t) = \text{Quot}(\mathbb{F}_p[t])$. In ihm gibt es unendlich viele Einheiten da $\#R = \infty$ und alles außer 0 eine Einheit ist, da R nach Konstruktion ein Körper ist. Für alle $u \in R$ gilt aber auch $p \cdot u = 0$, da R Charakteristik p hat. R kann also als Beispiel angeführt werden.

c) Angenommen es gibt so einen Ring R. Es gilt dann $\#R^\times < \infty$. Sagen wir $\#R^\times = n$. Für jedes $x \in R^\times$ ist $\langle x \rangle$ eine Untergruppe von $R^\times$ und daher gilt nach dem Satz von Lagrange:

$$\forall x \in R^\times : \text{ord}(x) \mid n \Leftrightarrow \text{ord}(x) \leq n.$$

Somit ergibt sich ein Widerspruch.