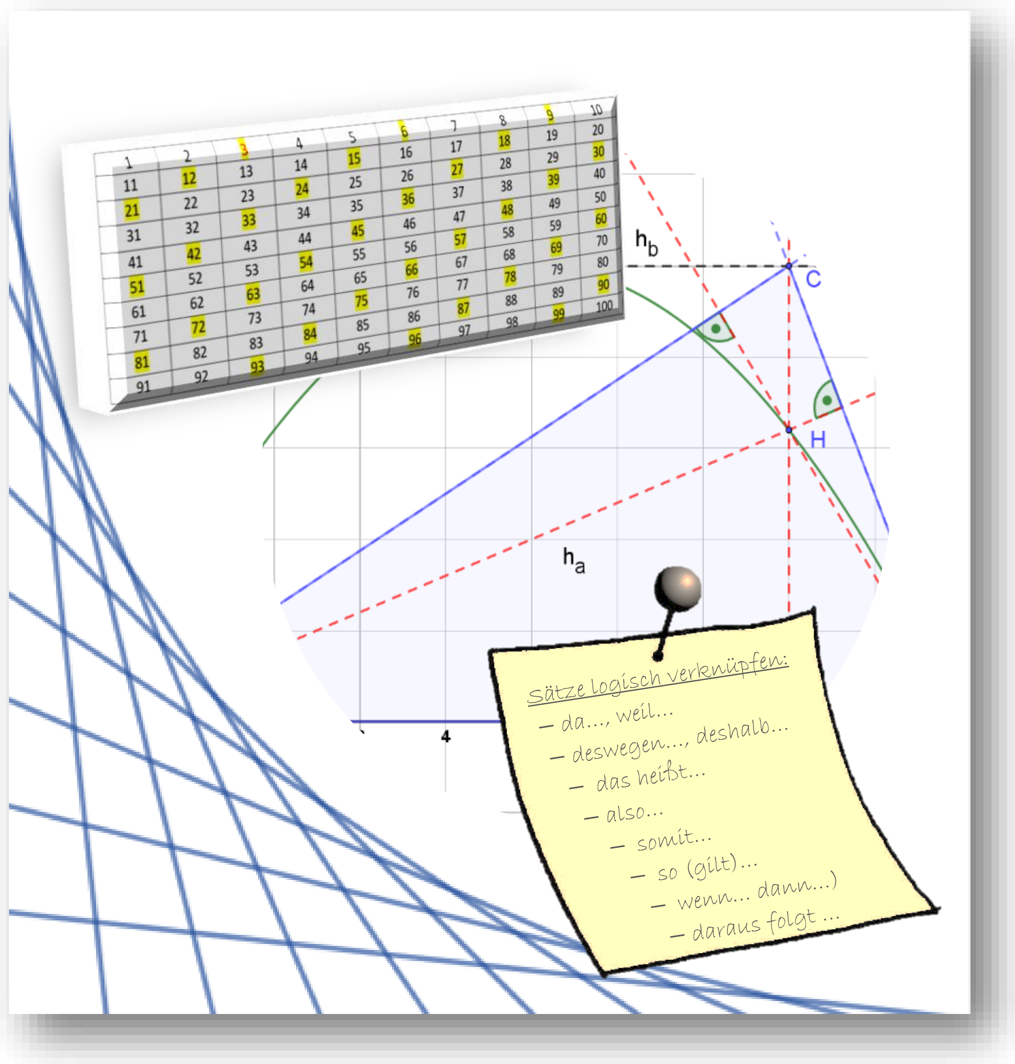
impulse

für guten Mathematikunterricht



Mathematikdidaktische
Zeitschrift für Augsburg

Universität Augsburg
Didaktik der Mathematik

1. Ausgabe im Februar 2023

Inhalt

Editorial

Liebe Leserin, lieber Leser,

Sie halten die erste Ausgabe der Augsburger Mathematikdidaktikzeitschrift *impulse* in Händen. Ziel dieser Zeitschrift ist es, praktikable Ideen für den Mathematikunterricht zu kommunizieren und dabei einen Austausch von Universität und Schulpraxis zu ermöglichen. Aus diesem Grunde streben wir an, dass jede Ausgabe sowohl Beiträge aus der Schulpraxis wie aus der Universität enthält. Wir freuen uns, dass wir bereits für die erste Ausgabe zwei Lehrkräfte als Autoren gewinnen konnten! Wenn Sie also auch Ideen, Erfahrungen oder Impulse aus Ihrem Mathematikunterricht haben, die Sie an Kolleg*innen weitergeben möchten, schreiben Sie uns gerne an – wir freuen uns auch über Lob, Kritik, Anregungen, Verbesserungsvorschläge, … Die zweite Ausgabe soll im Herbst erscheinen.

Sabrina Bersch, Andreas Merkel, Renate Motzer, Reinhard Oldenburg, Samuel Pfeifer

(das Redaktionsteam)

Die vergessene Transversale – das ist doch die Höhe!

Andreas Merkel, Universität Augsburg

Im Gegensatz zu den Mittelsenkrechten, den Winkelhalbierenden und den Seitenhalbierenden werden die Höhen als Dreieckstransversalen, die sich ebenfalls in einem Punkt schneiden, in der Schule aktuell kaum besprochen. Das ist schade, denn der Höhenschnittpunkt hat einige verblüffende Eigenschaften zu bieten, von denen eine im Folgenden an einer attraktiven innermathematischen Aufgabe vorgestellt wird. Zunächst wird aber der gemeinsame Höhenschnittpunkt kurz motiviert.

Gemeinsamer Höhenschnittpunkt: Motivation

Dass sich auch die drei Dreieckshöhen in einem gemeinsamen Punkt schneiden, kann eine Klasse genauso leicht mit GeoGebra entdecken, wie dies bei den übrigen Transversalen in der Schule häufig praktiziert wird. Evtl. wird dabei übersehen, dass ein gemeinsamer Schnittpunkt bei den Höhen eigentlich sehr viel weniger überrascht als etwa bei den Mittelsenkrechten, schneiden sich doch die drei Höhen im rechtwinkligen Dreieck, dem Kernbaustein der ebenen Geometrie, selbstverständlich in einem Punkt, dem Scheitel des rechten Winkels. (Man nimmt nur häufig die beiden Katheten nicht als Höhen wahr.) Dieser nichttriviale Fall des rechtwinkligen Dreiecks hebt sich von dem des hochsymmetrischen gleichseitigen Dreiecks ab, bei dem alle Transversalen zusammenfallen und ein gemeinsamer Schnittpunkt somit nicht überrascht.

Höhenschnittpunkt und Parabel

Hat man nun den gemeinsamen Schnittpunkt der Dreieckshöhen etwa mit Hilfe einer GeoGebra-Datei entdeckt, stößt man recht mühelos auf einen verblüffenden, ästhetisch sehr reizvollen Zusammenhang zu einem Standardthema der Schulmathematik: Bewegt man etwa den Punkt C parallel zur Seite c, dann hat es den Anschein, als ob sich der gemeinsame Höhenschnittpunkt H (Spurpunkt; siehe Abb. 1) auf einer Parabel bewegt.

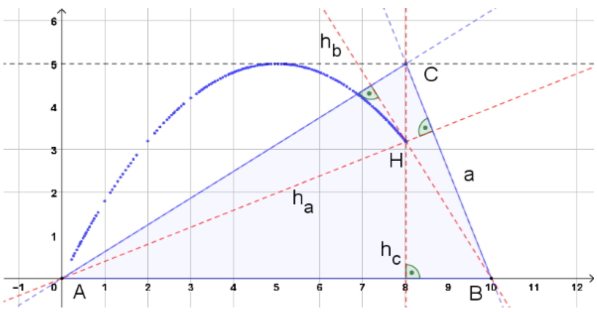


Abbildung 1

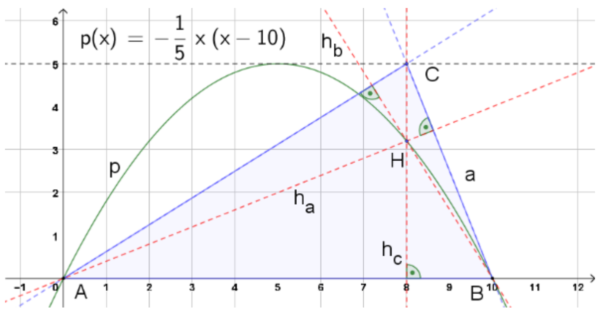
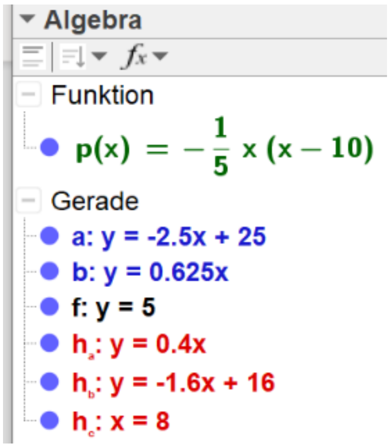


Abbildung 2

Ein didaktisch gehaltvoller Auftrag an die Klasse könnte sein, dies in Partnerarbeit unter Einsatz von GeoGebra zu modellieren und eine entsprechende Parabelgleichung zu ermitteln.

Im abgebildeten Fall mit $A(0;0)$, $B(10;0)$ und $y(C) = 5$ könnte $p(x) = -\frac{1}{5}x(x-10)$ passen (siehe Abb. 2).

Für sich allein stellt dies schon eine gehaltvolle Modellierung dar, aber sind darüber hinaus auch Begründungen und Beweise der gemachten Beobachtungen und Entdeckungen möglich? Für eine 9. Klasse scheint dies zunächst sehr ambitioniert zu sein, da man im betrachteten Fall formal eine Schar von Dreiecken ABC_t mit $C_t(t;5)$ und Parameter t betrachten würde und dieser Grad an Abstraktion in einer 9. Klasse meist nicht angestrebt wird. Auch der Beweis, dass sich alle drei Höhen in einem Punkt H schneiden, wird häufig als zu schwierig empfunden. (Ein denkbarer Beweis greift auf eine zentrische Streckung des Dreiecks ABC mit dem Schwerpunkt als Zentrum und dem Faktor $-0{,}5$ zurück.) Tatsächlich ist aber hinsichtlich der geäußerten Bedenken ein eleganter Ausweg möglich, indem man die Dreieckseiten und -höhen als aufeinander senkrecht stehende Geraden interpretiert, die man algebraisch beschreiben kann, und an einem konkreten Beispiel argumentiert. Wir betrachten also etwa den abgebildeten Fall mit $C(8;5)$ und ermitteln die Koordinaten von H als Schnittpunkt der Höhen h_c und h_a bzw. h_c und h_b. h_c wird durch die Gleichung $h_c\colon x = 8$ beschrieben, für h_a und h_b müssen wir wissen, dass das Produkt der Steigungen zweier Geraden, die aufeinander senkrecht stehen und nicht parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen, den Wert -1 hat. Dieses Kriterium wird im Lehrplan der Realschule explizit erwähnt, am Gymnasium dagegen (erstaunlicherweise?) nicht. Wie könnte sich nun ein Gymnasiast oder eine Gymnasiastin behelfen? Hier lohnt sich ein Blick in die Algebra-Ansicht von GeoGebra. Wir lesen folgende Gleichungen ab:



$$a(x) = -\frac{5}{2}x + 25,$$

$$b(x) = \frac{5}{8}x,$$

$$h_a(x) = \frac{2}{5}x,$$

$$h_b(x) = -\frac{8}{5}x + 16.$$

Nun macht es sich bezahlt, dass die konkreten Werte geschickt gewählt wurden, denn die Vermutung, dass die Steigung der Höhen h_a und h_b gleich dem negativen Kehrwert der Steigung der jeweiligen Dreieckseite ist, drängt sich sehr stark auf. Eine Begründung könnte anhand der Skizze in Abb. 3 oder, noch überzeugender, mit einer entsprechenden GeoGebra-Datei erfolgen: Man dreht die Gerade a samt zugehörigem Steigungsdreieck um 90° um den Höhenfußpunkt L auf die Höhe h_a und betrachtet das so entstandene Steigungsdreieck der Höhe h_a: Die Katheten habe ihre Lage bzgl. der Koordinatenachsen getauscht, und es ist ein Vorzeichenwechsel aufgetreten!

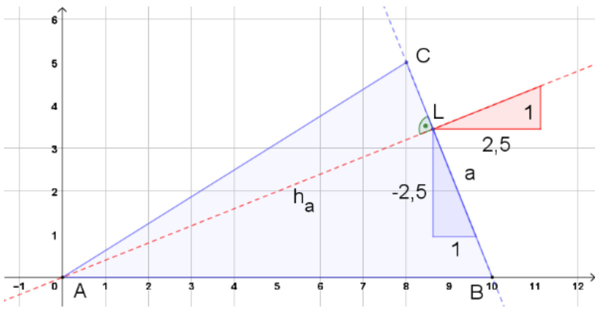


Abbildung 3

Setzt man nun $x = 8$ (h_c!) in $h_a(x)$ und $h_b(x)$ ein, erhält man jeweils $y = 3{,}2$. Damit haben wir exemplarisch gezeigt, dass sich die drei Höhen wie vermutet in einem Punkt H schneiden. Setzt man nun $x = 8$ in die vermutete Parabelgleichung $p(x) = -\frac{1}{5}x(x-10)$ ein, erhält man ebenfalls $y = 3{,}2$. Damit haben wir wiederum exemplarisch gezeigt, dass sich der gemeinsame Höhenschnittpunkt H wie vermutet auf einer Parabel bewegt, wenn man einen Eckpunkt des Dreiecks parallel zur gegenüberliegenden Dreieckseite verschiebt. Als Übung oder Hausaufgabe kann die Klasse einen zweiten exemplarischen Nachweis führen, etwa für den symmetrischen Fall $C(2;5)$.

In der vorgestellten Aufgabe vereinen sich Standardthemen der Schulmathematik mit Möglichkeiten der Vertiefung. Der selbstentdeckende Einsatz mit GeoGebra bietet sich sehr stark an und macht die besondere Ästhetik des Sachverhalts sichtbar. Interessant am Einsatz von GeoGebra ist hier weiterhin, dass einerseits Vermutungen erarbeitet, andererseits Ergebnisse bestätigt werden können. Für die Umsetzung in GeoGebra sind nur elementare Standardbefehle erforderlich, der technische Anspruch ist also überschaubar. In einer besonders leistungsstarken Klasse oder in höheren Jahrgangsstufen könnte auch der oben angedeutete allgemeine Beweis, der den Sachverhalt mittels einer Schar von Dreiecken modelliert, erfolgen. Dieser wird im Folgenden grob dargestellt: Wir betrachten die Schar von Dreiecken ABC_t mit $A(0;0)$, $B(10;0)$ und $C_t(t;5)$ und Parameter t. Wir stellen nun die Gleichung von h_a auf. Diese steht senkrecht auf der Geraden a. Die Gerade a wiederum ist gegeben durch die Punkte $B(10;0)$ und $C_t(t;5)$ und hat damit die Steigung

$$m_a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-0}{t-10}.$$

Also hat h_a wie oben begründet die Steigung

$$m_{h_a} = \frac{10-t}{5}.$$

Als Ursprungsgerade hat h_a somit die Gleichung

$$h_a(x) = \frac{10-t}{5} \cdot x.$$

Die x-Koordinate von $H(x;y)$ stimmt mit der x-Koordinate von $C_t(t;5)$ überein. Somit erhalten wir durch Einsetzen von x für t in $h_a(x)$ die y-Koordinate von $H(x;y)$ in Abhängigkeit von x (und somit die Gleichung der Parabel p von oben):

$$y = \frac{10-x}{5} \cdot x.$$

Für weitere Informationen: andreas.merkel@uni-a.de

Sprachliche Unterstützung (nicht nur) beim Argumentieren

Sabrina Bersch, Universität Augsburg

Das mathematische Argumentieren gilt als eine wichtige, im Mathematikunterricht zu fördernde Kompetenz. Dabei stehen Lehrkräfte nicht selten vor verschiedenen Herausforderungen, wie eine Interviewstudie im Rahmen meiner Promotion zeigte.[1] Insbesondere berichteten Lehrkräfte von Schwierigkeiten von Schüler*innen beim Gebrauch von Sprache, die sich im Unterricht zeigen. Folgende Interviewausschnitte sollen dies exemplarisch aufzeigen:

Frau M: *„Unseren Schülern fällt es sehr schwer, Mathematik mit Sprache in Verbindung zu bringen."*

Frau J: *„[Der] Schüler fühlt sich überfordert mit Begriffen, mit Bezeichnungen, mit Schreibweisen."*

Herr G: *„Also das Verbalisieren von mathematischen Inhalten fällt Schülern unglaublich schwer."*

Herr K: *„Der größte Unterschied zwischen meiner Begründung und denen der Schüler ist, dass sie es tatsächlich schlecht zu Papier bringen können oder auch einfach schlecht formulieren können, mit schlecht in dem Sinne meine ich fehlende Präzision."*

Frau J: *„Weil ich erkenne, dass die Schüler sich da wahnsinnig schwertun, dies dann niederzuschreiben."*

Dass sich die genannten Schwierigkeiten nicht pauschal auf alle Lernende beziehen, zeigt insbesondere folgende Aussage von Herrn D:

> *„Also ein schlechter Schüler, da merkt man so: Okay, der hat schon so ungefähr eine Ahnung, aber so ganz detailliert kann er es eigentlich nicht erklären. Und gute Schüler können das dann wesentlich besser erklären oder da merkt man dann: Ja, okay, der hat das schon eher verstanden und kann das auch wirklich sauber hinschreiben. […] Es ist halt wirklich logisch stringent das Ganze und in sich schlüssig. Und auch wirklich nicht bloß so wischiwaschi beschrieben, wie das halt die anderen dann zum Teil machen."*

Das Argumentieren ist immer untrennbar mit dem Gebrauch von Sprache verbunden, egal ob Argumentationen mündlich formuliert oder schriftlich notiert werden. Eine Möglichkeit, den sprachlichen Schwierigkeiten der Schüler*innen entgegenzuwirken, ist eine fokussierte Sprachförderung. Diese kann beim schriftlichen Formulieren zum Beispiel mit Hilfe von Formulierungshilfen in Form von Satzbausteinen oder Wortspeichern umgesetzt werden.[2]

---

[1] Siehe Bersch (2023)

[2] Zum Weiterlesen z. B. Meyer/Prediger (2012)

Beispiel:

Begründen Sie folgende Aussage:

Eine ganzrationale Funktion dritten Grades hat maximal 2 lokale Extrema.

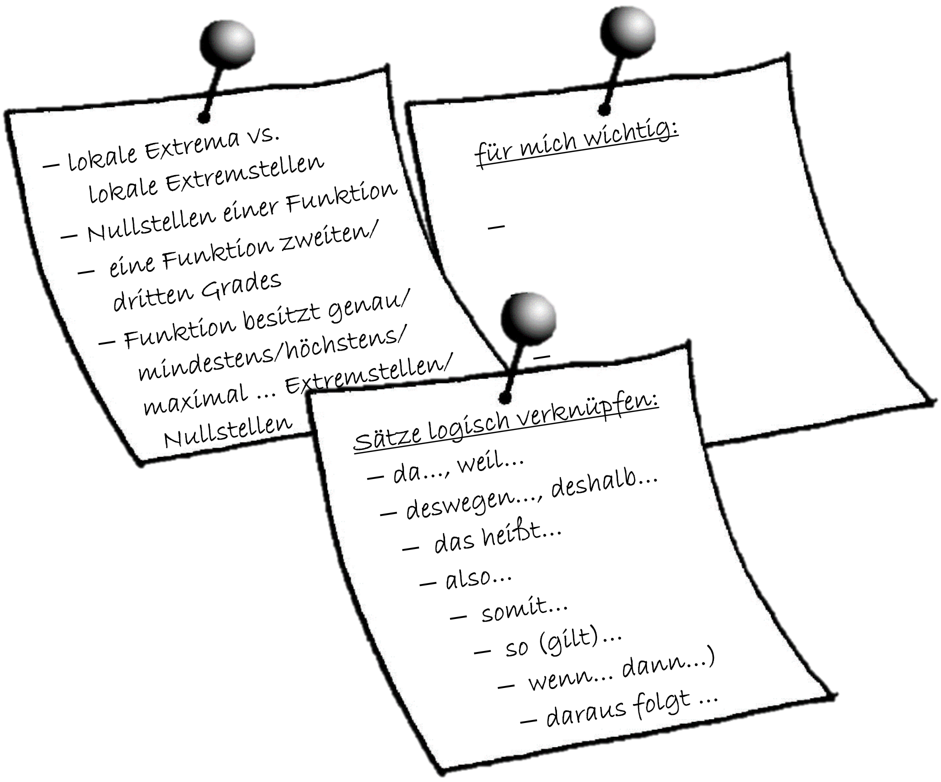


Abbildung 1: Beispiel eines Wortspeichers

Ein Wortspeicher zu dieser Aufgabe (siehe Abb. 1) könnte allgemein sprachliche Mittel zur logischen Verknüpfung von Sätzen und stärker auf den Inhalt der Aufgabe zugeschnittene Fachbegriffe und Wendungen enthalten. Außerdem ist es sinnvoll, die Lernenden aufzufordern, individuell Begriffe oder Wendungen zu notieren, denen sie bei der Bearbeitung oder Besprechung der Aufgabe begegnen und die noch nicht Teil ihres aktiven Wortschatzes sind.

Bei Wortspeichern und Satzbausteinen handelt es sich um eine Zusammenstellung wichtiger (Fach-)Begriffe, Wendungen und Satzteile oder -muster sowie sprachlicher Mittel zur logischen Verknüpfung von Sätzen. Formulierungshilfen können mit den Schüler*innen gemeinsam erarbeitet oder als zusätzliche Unterstützung differenzierend zur Verfügung gestellt werden. Je nach Notwendigkeit können solche Formulierungshilfen nur aus einzelnen Fachbegriffen und anderen Wörtern bestehen oder eine Zusammenstellung ganzer Sätze und Teilsätze sein. Die Wortspeicher oder Satzbausteine können aufgabengebunden oder aufgabenübergreifend eingesetzt werden, sollten aber nicht zu spezifisch sein, um eine Sprachförderung über eine konkrete Aufgabe hinaus zu ermöglichen.

Zur Erstellung eines Wortspeichers ist es zielführend, erst ein oder mehrere Lösungsbeispiel(e) zur Aufgabe auszuformulieren und daraus zentrale sprachliche

Elemente zu entnehmen. Gegebenenfalls bietet sich eine Verallgemeinerung oder Ergänzung der sprachlichen Elemente an, um diese auch aufgabenübergreifend einsetzen zu können.

Ein mögliches Lösungsbeispiel zu obiger Aufgabe könnte folgendermaßen aussehen:

> *Die lokalen Extremstellen einer Funktion sind Nullstellen der Ableitungsfunktion. Die Ableitung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades ist eine ganzrationale Funktion zweiten Grades. Da eine ganzrationale Funktion zweiten Grades höchstens zwei Nullstellen hat, hat eine ganzrationale Funktion dritten Grades maximal zwei lokale Extrema.*

Eine weitere Möglichkeit der Sprachförderung bietet sich durch die explizite Arbeit mit solchen Lösungsbeispielen. Diese können mit den Schüler*innen auf ihre sprachliche Struktur und sprachliche Besonderheiten hin analysiert werden. Eine Sicherung könnte dann wiederum in einem Wortspeicher oder Ähnlichem erfolgen. Dabei sollte nicht nur ein einziges „Musterbeispiel" thematisiert werden, um nicht den Eindruck zu erwecken, dass es beim Argumentieren eine eindeutige richtige Lösung geben könnte.

Mit dem Begriff *mathematisches Argumentieren* können viele verschiedene Tätigkeiten und Prozesse zusammengefasst werden, bei denen mathematische Inhalte mit Argumenten und logischen Schlüssen verbunden und „Warum?"-Fragen thematisiert werden. Dazu gehören auch das *Begründen* und *Beweisen* als spezielle Arten des Argumentierens. Meine Interviewstudie zeigt, dass den befragten Lehrkräften viele verschiedene Gründe bewusst sind, warum das Argumentieren im Mathematikunterricht gefördert werden sollte. Es gilt also, die Chancen, die sich durch das Argumentieren bieten, zu nutzen und gleichzeitig an sprachlichen und sonstigen Herausforderungen zu arbeiten, um allen Lernenden einen Kompetenzzuwachs zu ermöglichen. So können gerade durch das Argumentieren auch sprachlich-kommunikative Kompetenzen bei den Schüler*innen gefördert werden, die auch über das Argumentieren hinaus im Mathematikunterricht von Bedeutung sind. Lösungswege nachvollziehbar darstellen, mathematische Inhalte erklären und gemachte Entdeckungen präsentieren sind dabei nur einige Beispiele, die aktiven Sprachgebrauch erfordern. Bei solchen Aktivitäten ist wiederum eine differenzierte sprachliche Unterstützung durch die Lehrkraft sinnvoll.

Es würde mich freuen, wenn obige Anregungen zur sprachlichen Unterstützung von Schüler*innen Eingang in die Unterrichtspraxis finden. Bei Interesse können konkrete Unterrichtsmaterialien, die Wortspeicher und Satzbausteine enthalten, in Form einer differenzierenden, aufgabenbasierten Lernumgebung zum Argumentieren mit ganzrationalen Funktionen bei der Autorin per E-Mail an *sabrina.bersch@uni-a.de* angefragt werden.

Quellen:

Bersch, S. (2023, im Druck). *Mathematisches Argumentieren im Analysisunterricht. Explorative Studien zu Herausforderungen und Lösungsansätzen aus der Perspektive von Lehrkräften.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Meyer, M. & Prediger, S. (2012). Sprachenvielfalt im Mathematikunterricht. Herausforderungen, Chancen und Förderansätze. *Praxis der Mathematik in der Schule, 54*(45), 2-9.

Gedrehte Parabel und Geradenschar

Marcus Sauset, Hans-Leipelt-Schule Donauwörth

Geradenscharen sind in den Lehrplänen der weiterführenden Schulen noch immer verankert, wenn auch oft nur in vereinfachter Form als Parallelenscharen oder mit nur linearen Parametern. Dieser Artikel soll zeigen, welch beeindruckende Figuren entstehen können, wenn o. g. Einschränkungen aufgehoben werden (im Unterricht auch für demonstrative Zwecke geeignet).

In einem Buch, welches Mathematik spielerisch erfahrbar machen soll (Titel leider nicht mehr bekannt), las ich eine Anleitung zum Zeichnen für Kinder.

Abbildung 1

Es soll der 1. Quadrant eines kartesischen Koordinatensystems gezeichnet werden und die Summe der Koordinaten der Schnittpunkte einer Geraden mit den Koordinatenachsen muss jeweils 10 ergeben. Allgemein formuliert sollen also Punkte $N(x|0)$ und $P(0|y)$ auf der x- und y-Achse verbunden werden, für die $x + y = 10$ gilt. Führt man dies für natürliche Zahlen aus, so ergibt sich obenstehendes Bild (Abb. 1), wobei die Einschränkung auf die natürlichen Zahlen nicht explizit gefordert ist.

Die entstandene Grafik erweckt den Eindruck, als würde der linke untere Teil des 1. Quadranten durch ein verformtes Netz (ähnlich der Architektur von Frei Otto, z.B. Olympiapark München) bedeckt, welches von den Koordinatenachsen und einer Kurve begrenzt wird. Erstaunlich, wo doch nur Geraden bzw. Strecken eingezeichnet wurden. Ist also eine Kurve mit dem Lineal gezeichnet worden? Zudem ist keinesfalls sofort ersichtlich, welche Art von Kurve, ob Hyperbelast, Graph einer Exponentialfunktion oder Parabelast, sich ergibt.

Da die obenstehende Grafik aus Geraden besteht, die einen Zusammenhang über die Summe aus y-Achsenabschnitt und Nullstelle haben, scheint eine Darstellung der Geraden als lineare Parametergleichung möglich.

Legt man die Funktionsgleichung $f(x) = m \cdot x + t$ zugrunde, so bietet sich folgende Herangehensweise an: Der Parameter t verändert den y-Achsenabschnitt, ein zusätzlicher Parameter a soll eine beliebige, aber feste Summe aus Nullstelle n und y-Achsenabschnitt t angeben. Somit gilt $a = 10$ für das Beispiel in Abb. 1. Welche Beziehung besteht unter diesen Bedingungen zwischen der Geradensteigung m und den Parametern a und t?

Es gilt $a = n + t$. Da a frei wählbar ist, anschließend aber konstant gehalten wird, kann der Parameter t in die Geradensteigung m eingepflegt werden.

Für die Nullstelle gilt $f_t(n) = 0$ und damit $m \cdot n + t = 0$. Es folgt $m = -\frac{t}{n}$. Mit $a = n + t$ bzw. $n = a - t$ ergibt sich $m = -\frac{t}{a-t}$. Führt man obige Erkenntnisse zusammen, resultiert folgende Funktionsgleichung in Abhängigkeit von a und t mit $a \neq t$:

$$\boldsymbol{f_{a;t}(x) = -\frac{t}{a-t} \cdot x + t}$$

In der folgenden Grafik (Abb. 2) wurden $a = 10$ und $t \in [-50; 10[\cup]10; 50]$ gewählt.

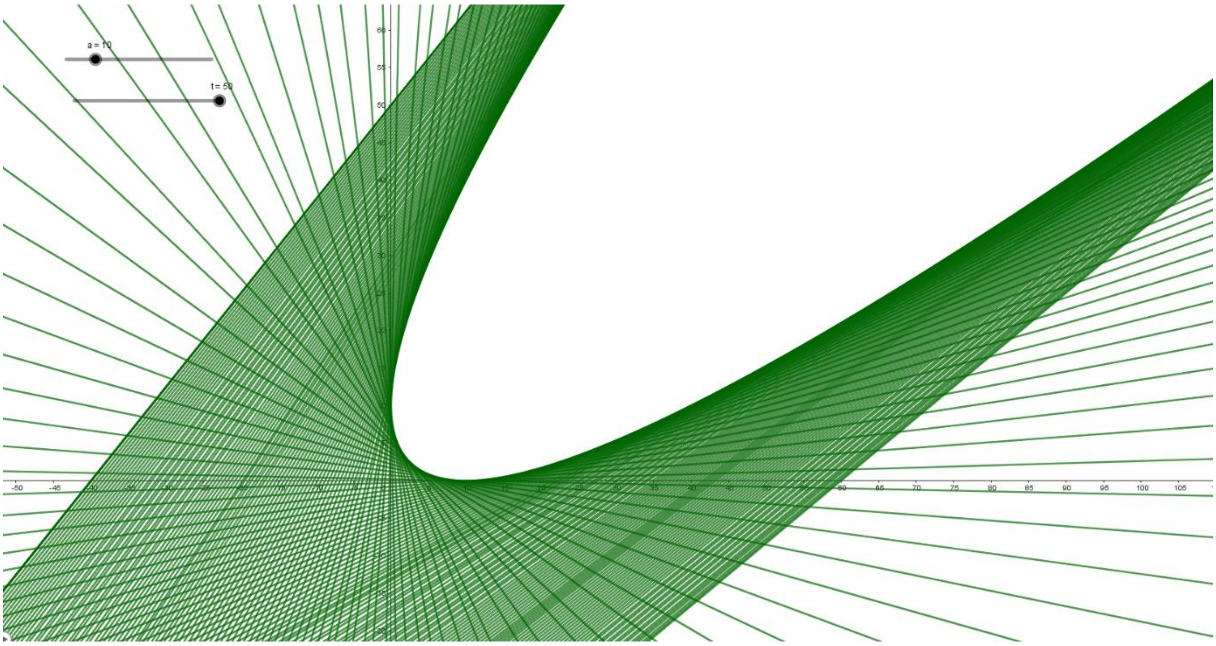


Abbildung 2

Bei der Betrachtung ergeben sich nun mindestens so viele neue Fragen wie Erkenntnisse. Bei der entstehenden Kurve handelt es sich wohl nicht um den Graphen einer Funktion, da offensichtlich keine eindeutige Zuordnung gegeben ist. Vielmehr scheint es sich um eine Art gedrehte/gekippte Parabel zu handeln. Vielleicht ein Kegelschnitt eines gekippten Kegels?

Für den Unterricht besteht die Möglichkeit, diese besondere Geradenschar als Ausblick einzubauen.
In der 11. Klasse der Fachoberschule habe ich den Schüler*innen zunächst mithilfe von GeoGebra veranschaulicht, wie sich eine Geradenschar verändert, wenn ein Parameter quadratisch statt linear auftritt. Anschließend sollten die Schüler*innen die Grafik unter Abb. 1 mit den genannten Bedingungen selbst zeichnen (Zeitaufwand: ca. 5 min) und im weiteren Verlauf wurde Abb. 2 auch mithilfe von GeoGebra dargestellt. Die Schüler*innen staunten nicht schlecht ob der beeindruckenden Grafik. Die nun naheliegende Frage nach der Gleichung der Hüllkurve ist aber schwer. Ein denkbarer Ansatz erfolgt über die Schnittpunkte jeweils zweier infinitesimal benachbarter Geraden. Eine ausgearbeitete Lösung, die zeigt, dass es sich oben tatsächlich um eine Parabel handelt, kann bei Interesse per Mail beim Autor angefordert werden: *marcus.sauset@fosbos-donauwoerth.de*

Teilbarkeitsregeln entdecken und begründen

Renate Motzer, Universität Augsburg

Im LehrplanPLUS ist die Behandlung der Teilbarkeit durch 2, 3, 5 und 10 vorgesehen. Naheliegend ist es, auch die Teilbarkeit durch 4, 6 und 9 zu behandeln. Allerdings sagt der Lehrplan nichts darüber, dass man diese Regeln auch begründen und nicht nur anwenden kann. Doch wo kommt es bei der Teilbarkeit durch 3 her, dass man die Quersumme betrachten soll? Wird dies den Schülerinnen und Schülern nur als Regel mitgeteilt und an ein paar Beispielen bestätigt, entsteht kein Verständnis für Mathematik. Mathematik scheint nur eine Trickkiste zu sein und man muss sich die Tricks halt merken (und in der nächsten Probe nicht mit anderen Tricks verwechseln).

Manchmal bringen die Kinder das Wissen über die Quersummenregel schon aus der Grundschule mit. Begründungen wurden auch dort vermutlich nicht erarbeitet. Dabei gäbe es durchaus einige Möglichkeiten. Werden z. B. beim Finden der Primzahlen im Hunderterfeld die Primzahlen mit dem „Sieb des Eratosthenes“ gesucht, markiert man auch alle Vielfachen der 3. Welches Muster ist erkennbar, wenn wir uns nur diese Vielfachen anschauen?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Es ergeben sich Diagonalen von rechts oben nach links unten. Was haben die Zahlen gemeinsam, die auf diesen Diagonalen liegen? Sie unterscheiden sich um 9 und haben die gleiche Quersumme (Ausnahme: 30 und dann 39, ebenso 60 und dann 69). Warum ändert sich die Quersumme meist nicht, wenn man 9 addiert: ein Zehner kommt dazu, ein Einer geht weg. Ausnahmen sollen betrachtet werden. Und wenn man über die 100 geht? $99 + 9 = 108$, ein Einer geht weg, die Neunzig gehen weg, ein Hunderter kommt dazu. Die Quersumme wird also um 9 kleiner sein. Danach geht das ursprüngliche Muster wieder weiter: ein Zehner dazu, ein Einer weniger.

Jetzt sind wir aber bei der 9. Eigentlich ist die Quersummenregel eine Regel für die Teilbarkeit durch 9. Dass man sie auch auf die 3 anwenden kann, liegt daran, dass 3 ein

Teiler von 9 ist. Haben wir festgestellt, dass man jede Zahl a so umformen kann, dass $a = 9 \cdot \ldots + \text{QS}(a)$ gilt, sieht man schnell, dass man die Teilbarkeit durch 3 auch an der Quersumme ablesen kann. Aus der Quersumme kann man somit nicht nur die Teilbarkeit durch 3 und 9 ablesen, sondern auch den Rest, den es im Fall der Nichtteilbarkeit gibt.

Hier eine Möglichkeit, diese Gleichung an einem Beispiel herzuleiten:

$$123567 = 1 \cdot 100000 + 2 \cdot 10000 + 3 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 7 =$$
$$1 \cdot (99999 + 1) + 2 \cdot (9999 + 1) + 3 \cdot (999 + 1) + 5 \cdot (99 + 1) + 6 \cdot (9 + 1) + 7 =$$
$$1 \cdot 99999 + 2 \cdot 9999 + 3 \cdot 999 + 5 \cdot 99 + 6 \cdot 9 + 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 =$$
$$9 \cdot (1 \cdot 11111 + 2 \cdot 1111 + \ldots + 6) + \ 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7$$

Man beachte, dass es sich dabei nicht nur um ein Beispiel handelt, an dem die Gültigkeit nachgeprüft wurde, sondern dass es sich durchaus um einen (freilich beispielgebundenen) Beweis handelt. Denn so wie diese Zahl umgeformt wurde, kann auch jede andere mehrstellige Zahl umgeformt werden. Also gilt $a = 9 \cdot \ldots + \text{QS}(a)$ für jede Zahl (im Zehner-System).

Ohne das Distributivgesetz zu verwenden und sich außerdem wirklich ums Teilen zu bemühen, kann man auch folgende Zerlegung betrachten, bei der es darum geht, Stufenzahlen zu teilen. (Für Kinder durchaus eine sehr ungewöhnliche Aufgabe.)

Am Beispiel 1234567:

$1\,000\,000 : 9 = 111\,111 \text{ R } 1$	$100\,000 : 9 = 11\,111 \text{ R } 1$	$10\,000 : 9 = 1111 \text{ R } 1$
	$200\,000 : 9 = 22\,222 \text{ R } 2$	$30\,000 : 9 = \ 333 \text{ R } 3$

$1000 : 9 = 111 \text{ R } 1$	$100 : 9 = 11 \text{ R } 1$	$10 : 9 = 1 \text{ R } 1$	$7 : 9 = 0 \text{ R } 7$
$4000 : 9 = 444 \text{ R } 4$	$500 : 9 = 55 \text{ R } 5$	$60 : 9 = 6 \text{ R } 6$	

Addiert man nun die Reste bei den Stellenwerten $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$, so sieht man, dass dort 3 Neuner drinstecken und 1 als Rest übrigbleibt. Der gleiche Rest ergäbe sich beim Teilen durch 3.

Hier nun noch zwei Zerlegungen, die die **Teilbarkeit durch 2, 4 und 8** untersuchen:

$$1234567 = 123456 \cdot 10 + 7$$
$$1234567 = 12345 \cdot 100 + 67$$
$$1234567 = 1234 \cdot 1000 + 2 \cdot 200 + 167.$$

An der ersten Zerlegung sieht man, dass die Zahl ungerade ist und dass es beim Teilen durch 5 den Rest 2 gibt. Aus der zweiten Gleichung lässt sich schließen, dass beim Teilen durch 4 ein Rest von 3 entsteht (60 bzw. 64 lässt sich durch 4 teilen). Die dritte Gleichung zeigt, dass man beim Teilen durch 8 einen Rest von 7 erhält. Außerdem gibt die Zahl beim Teilen durch 6 den Rest 1, den sie auch beim Teilen durch 2 und 3 hat.

Sollten unsere Schülerinnen und Schüler nicht lernen, solche Zusammenhänge zu entdecken?

Schulbuchseiten mit ansprechenden Herleitungen der Teilbarkeitsregeln und weitere Aufgaben, in denen man mit der Quersummenregel argumentieren kann, wurden im Februar 2019 unter dem Titel „Teilbarkeitsregeln und ihre Anwendungen“ beim Lehrerfortbildungstag vorgestellt. Die zugehörigen Folien können unter *renate.motzer@math.uni-augsburg.de* nachgefragt werden.

GeoGebra-Impuls

Hört, hört! – Töne mit trigonometrischen Funktionen modellieren

Reinhard Oldenburg, Universität Augsburg

Die Bedeutung der Parameter a und b der Funktion $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ lässt sich auf verschiedenen Wegen verstehen. Eine gute und mittlerweile verbreitete Möglichkeit ist, in GeoGebra den Term einzugeben, sodass automatisch zwei Schieberegler erzeugt werden, mit denen man die Amplitude a und die Frequenz b erkunden kann. Das ist ästhetisch, aber die Motivation der Lernenden hält sich trotzdem manchmal im durchschnittlichen Bereich. Man kann aber weitere sinnvolle Dinge mit diesen Parametern machen: Töne beschreiben. Töne, oder allgemeiner Schall, bestehen aus periodischen Schwingungen der Luft und erfreulicherweise kann GeoGebra die mathematische Beschreibung in hörbare Töne umsetzen. Dazu reicht die Eingabe des Befehls:

```
SpieleTon(sin(2*pi*440*x),0,3)
```

Diese Eingabe erzeugt einen drei Sekunden langen Ton mit einer Frequenz von 440 Hz. Die Variable ist die Zeit in Sekunden und läuft hier von 0 bis 3. Der jeweils erzeugte Schalldruck wird durch die Funktion angegeben: Der Faktor $b = 2\pi \cdot 440$ vor der Zeit x bewirkt, dass im Laufe jeder Sekunde 440 Maxima des Sinus erreicht werden. Ersetzt man die 440 durch größere oder kleinere Werte, kann man die Frequenz und damit die Tonhöhe ändern. Ein Vorfaktor (der aber vom Betrag höchstens 1 sein sollte) bestimmt die Lautstärke. Jetzt kann man anfangen, Töne zu modellieren: Ein Ton, der während 2 Sekunden langsam lauter wird:

```
x/2*SpieleTon(sin(2*pi*440*x),0,2)
```

Man bekommt so eine unmittelbare Rückmeldung zur Parameterwahl. Hat man das Prinzip verstanden, kann man sich weitere Ziele setzen, was modelliert werden soll: Ein Ton, der lauter und leiser wird und dabei immer tiefer u. s. w. Lassen Sie Ihre Schüler*innen kreativ sein und quietschen, es dient ja der Bildung. Tipp: Im Computerraum Ohrstöpsel nicht vergessen.

Für weitere Informationen: reinhard.oldenburg@uni-a.de

Rechenschaftsablagen im Mathematikunterricht

Tobias Weihrather, Gymnasium Buchloe

Rechenschaftsablagen im Mathematikunterricht: Vielfach werden sie von Schüler*innen gefürchtet und auch viele Lehrkräfte führen diese nur ungern durch oder sehen unter anderem aufgrund des zeitlichen Aufwandes ganz davon ab. In diesem Artikel soll eine Möglichkeit aufgezeigt werden, Rechenschaftsablagen nicht nur möglichst objektiv, reliabel und valide zu gestalten, sondern deren Durchführung gleichzeitig als effektive Lernzeit für alle Schüler*innen zu nutzen und dabei sowohl pädagogisch als auch didaktisch so zu agieren, dass diese einen echten Mehrwert für den Unterricht darstellen.

Rechenschaftsablagen stellen als Teil der kleinen Leistungsnachweise eine einfache Möglichkeit zur Erhebung einer mündlichen Note im Mathematikunterricht dar. Eine Abfrage an der Tafel ist dabei jedoch nicht nur aus pädagogischer Sicht fragwürdig, sondern häufig auch eine wenig valide Methode der Leistungserhebung, da die Schüler*innen ihr Wissen aufgrund der Aufregung bis hin zur Angst sich zu blamieren, nicht oder nur in verminderter Form abrufen können.

Eine einfache Möglichkeit, dies zu umgehen, wird im Folgenden kurz skizziert und anschließend näher erläutert.

Durchführung von Rechenschaftsablagen im Mathematikunterricht (Übersicht):

- Die Lehrkraft bereitet die Rechenschaftsablage schriftlich vor und druckt diese im Klassensatz aus.
- Zu Beginn der Stunde werden ca. drei Schüler*innen ausgewählt und darüber informiert, dass sie die Rechenschaftsablage ablegen werden. Diese Schüler*innen werden separat platziert.
- Anschließend erhalten alle Schüler*innen die ausgedruckten Aufgaben und bearbeiten diese selbstständig. Die Lehrkraft steht währenddessen allen Schüler*innen beratend zur Verfügung, insbesondere auch den zu prüfenden Schüler*innen.
- Im Anschluss an die Bearbeitungszeit stellen die zu prüfenden Schüler*innen ihre Ergebnisse vor, ergänzen diese um mündliche Erläuterungen und Argumentationen, und die Lösung wird im Plenum besprochen.
- Die schriftlichen Anfertigungen der zu prüfenden Schüler*innen werden eingesammelt und dienen als Grundlage für die Bewertung.

Vorbereitung der Rechenschaftsablage:

Die Aufgabenauswahl erfolgt ähnlich wie bei der Vorbereitung einer Stegreifaufgabe, wobei darauf zu achten ist, diese sowohl hinsichtlich der mathematischen Kompetenzen als auch der verschiedenen Anforderungsniveaus zu differenzieren. Die Bearbeitungszeit der Rechenschaftsablage sollte bei ca. 15 Minuten liegen. Hierbei kann berücksichtigt werden, dass die Schüler*innen in der Bearbeitungsphase ihre Ergebnisse nicht vollumfänglich verschriftlichen müssen. So können z. B. Aufgaben mit den Operatoren *Beschreibe*, *Erläutere* oder *Begründe* zunächst nur durchdacht oder in Stichpunkten beantwortet werden und die Bearbeitungen bei der mündlichen Präsentation um die notwendigen Beschreibungen, Erläuterungen oder Begründungen ergänzt werden. Im Hinblick auf die nachfolgende Unterrichtsstunde kann mitunter bereits durch die Aufgabenwahl (z.B. im Transferteil) eine Problemstellung aufgezeigt werden, welche anschließend den Übergang zu den neuen Unterrichtsinhalten ebnet. So bildet die Rechenschaftsablage gleichzeitig einen Einstieg in eine Fortführung oder Vertiefung der aktuellen Unterrichtsinhalte. Eine digitale Verschriftlichung der Lösung erleichtert das spätere Vorgehen.

Organisation der Rechenschaftsablage:

Die Auswahl der zu prüfenden Schüler*innen erfolgt zu Beginn der Stunde. Sie werden abseits der übrigen Schüler*innen am Rand oder im vorderen Teil des Klassenzimmers platziert. Dadurch kann einerseits gewährleistet werden, dass die Schüler*innen die Leistung selbstständig erbringen, andererseits ist somit auch für die Lehrkraft stets erkennbar, wer geprüft wird.

Durchführung der Rechenschaftsablage:

Anschließend erhalten alle Schüler*innen das Angabenblatt und bearbeiten dieses selbstständig. Hierdurch kann die zur Verfügung stehende Unterrichtszeit für alle Schüler*innen sehr effizient genutzt werden. Die Lehrkraft geht in dieser Zeit durch die Klasse und gibt den Schüler*innen individuelle Rückmeldung und Hilfe. Die Schüler*innen sollen hierbei ihre Frage stets zielgerichtet formulieren, wobei auf die Verwendung von Fachsprache zu achten ist. Bei den zu prüfenden Schüler*innen wird der Umfang der Hilfestellung notiert und mitunter später in der Bewertung berücksichtigt. Im Unterschied zu schriftlichen Leistungsnachweisen können die Schüler*innen so die Möglichkeit nutzen, an entscheidenden Stellen einen Hinweis zu erhalten und müssen gleichzeitig erkennen und mathematisch kommunizieren, welches diese entscheidenden Stellen sind.

Die Lehrkraft beobachtet hierbei insbesondere die aufgetretenen Schwierigkeiten sowie den Fortschritt der zu prüfenden Schüler*innen. So kann in der nachfolgenden Phase die Präsentation möglichst gewinnbringend gestaltet werden.

Präsentationsphase:

In der anschließenden Phase präsentieren die zu prüfenden Schüler*innen ihre Ergebnisse, indem sie ihre Aufzeichnungen beispielsweise unter die Dokumentenkamera legen, ihren Lösungsweg erläutern und mündlich ergänzen. Die Lehrkraft wählt hierbei zu jeder Teilaufgabe den Präsentierenden auf der Grundlage der Beobachtungen aus der vorhergehenden Phase aus. Dadurch kann gewährleistet werden, dass auch leistungsschwächere Schüler*innen (weitgehend) korrekte Lösungswege vorstellen können und so Erfolgserlebnisse im Mathematikunterricht erhalten. Dadurch dass die Schüler*innen hierbei nicht allein vor der Klasse stehen, kann die Lehrkraft Fragen direkt an den nächsten Schüler bzw. die nächste Schülerin weitergeben, falls jemand keine Antwort weiß. Hierbei sollen explizit auch die übrigen Schüler*innen Fragen stellen und beantworten, wobei eine positive Fehlerkultur etabliert wird. Des Weiteren können durch die unterschiedlichen Lösungen auch gezielt mögliche Fehler oder alternative Lösungswege aufgegriffen und aufgezeigt werden. Durch mündliche Fragen an die zu prüfenden Schüler*innen wird dabei der Charakter einer mündlichen Note sichergestellt.

Bei geschickter Aufgabenwahl können im Anschluss an die Präsentation und Besprechung der Lösungswege die Problemstellung der Aufgabe oder die Fragen der Schüler*innen bzw. der Lehrkraft zu einer Problemformulierung im Plenum führen, deren Lösung im übrigen Teil der Stunde thematisiert wird. So könnte beispielsweise eine Aufgabe, bei der der Punkt maximaler Steigung eines Graphen einer ganzrationalen Funktion dritten Grades gesucht war, zu einer Unterrichtsstunde über die zweite Ableitung überleiten.

Bewertung:

Im Anschluss an die Präsentationsphase werden die Aufzeichnungen der zu prüfenden Schüler*innen eingesammelt und dienen als Bewertungsgrundlage. Daneben fließen die mündliche Präsentation sowie evtl. gegebene Hilfestellungen in die Bewertung mit ein.

Fazit:

Durch die dargestellte Vorgehensweise zur Durchführung von Rechenschaftsablagen wurde eine Möglichkeit aufgezeigt, diese gewinnbringend in den Mathematikunterricht zu integrieren. Hierbei hat sich in der Praxis eine Durchführung im Abstand von ca. ein bis zwei Wochen als sinnvoll erwiesen. Durch die Gestaltung des Ablaufs können in ca. 20 Minuten drei Schüler*innen geprüft werden, wobei die übrige Klasse die Zeit ebenso sinnvoll nutzt und die Lehrkraft darüber hinaus die Möglichkeit hat, den Schüler*innen individuelle Hilfestellungen zu geben. Durch die anschließende Verbesserung erhalten alle Schüler*innen in regelmäßigem Abstand eine Rückmeldung über ihren aktuellen Leistungsstand, können Inhalte gezielt wiederholen und vorbereiten und lernen, diese in Prüfungssituationen abzurufen. Des Weiteren wurde sichergestellt, dass auch leistungsschwächere Schüler*innen hierbei zu einer gewinnbringenden Entwicklung des Unterrichtsgespräches beitragen können und ungelöste Aufgaben nicht in den Fokus rücken. Durch das Eingehen auf Fehler oder alternative Lösungswege erhalten die Schüler*innen weitere Informationen zu den Inhalten, wiederholen notwendiges Grundwissen und verbessern ihre Fähigkeiten mathematisch zu kommunizieren sowie zu argumentieren. Die schriftlichen Aufzeichnungen sowie die festgelegte Bearbeitungszeit sorgen dabei für eine möglichst objektive, reliable und valide Form der mündlichen Leistungserhebung.

Zur vorgestellten Form von Rechenschaftsablagen können beim Autor Beispiele aus der Q11 per E-Mail an *tobias.weihrather@gymnasium-buchloe.de* erfragt werden.

Auszug aus dem Positionspapier der GDM zum IQB-Bildungstrend

„Mit dieser Stellungnahme nehmen wir Bezug auf die Ergebnisse des IQB-Bildungstrends 2021 für die Primarstufe zum Fach Mathematik, die am 17. Oktober 2022 in der KMK präsentiert worden sind. Die im Fach Mathematik festgestellten Rückgänge des Anteils an Schülerinnen und Schülern, die am Ende der Grundschulzeit den Regelstandard erreichen, und die zugleich festgestellten Zuwächse an Lernenden, die den Mindeststandard verfehlen, lassen sich unserer Ansicht nach nicht monokausal erklären. Es gibt vielmehr ein ganzes Bündel an Faktoren, die sich ungünstig auf die Entwicklungen der fachlichen Kompetenzen an sich und im Besonderen der mathematischen Kompetenzen von Grundschüler:innen in den letzten Jahren ausgewirkt haben – im Folgenden seien Faktoren genannt, die aus unserer Sicht zentral sind:

a) Quantität und Qualität der Beschulung während der Pandemiezeit: Die Unterrichtszeit in Präsenz war in den Schuljahren 2019/20 sowie 2020/21 für alle Kinder deutlich reduziert (Wechselunterricht, Quarantänezeiten ...), sodass viele Kinder nur noch eingeschränkt mathematisch bedeutsame Lernsituationen in der Schule erfahren konnten. Zugleich waren die Lehrkräfte mit der Herausforderung konfrontiert, häusliches Lernen zu organisieren und Eltern als mögliche Lernbegleitende einzubinden. Ohne eine qualifizierte Lernbegleitung kann es im Fach Mathematik schnell passieren, dass der Fokus einseitig auf das Beherrschen von Rechenprozeduren gelegt wurde und weniger Gelegenheiten für das nachhaltige Verstehen von Mathematik zur Verfügung standen. Die verwendeten Lernmedien haben vermutlich wenig dazu beigetragen, relevante kognitive Prozesse zu initiieren.

b) Unabhängig davon bzw. bereits vor dem Pandemiegeschehen wurden die Anforderungen an Lehrkräfte im und neben dem Unterricht insbesondere in der Grundschule vielfältiger: Lehrkräfte sind gegenwärtig mit einer zunehmenden Bandbreite an Aufgaben konfrontiert (z. B. Digitalisierung, umfassende und oftmals nicht fachspezifische Elternberatung, Umgang mit allgemeinen ungünstigen Lernvoraussetzungen einzelner Kinder, ...), die nicht allein ein hohes Maß an zusätzlicher Belastung bedeuten, sondern für die Lehrkräfte derzeit nur zum Teil ausgebildet sind. Dies hat nicht allein die Konsequenz, dass sich die Zeit für mathematisches Arbeiten der Lehrkraft mit den Lernenden und die Zeit für einen tragfähigen Erwerb von mathematischen Kompetenzen reduziert, sondern es kann auch zur Folge haben, dass ein fachlich unreflektiertes Verständnis von Individualisierung umgesetzt wird.

c) Lehrkräftemangel insbesondere in der Grundschule: An vielen Grundschulen fehlen ausgebildete Lehrkräfte. In manchen Schulen ist es kaum möglich, die Stundentafel einzuhalten, da Fachkräfte fehlen. Hiermit verbunden ist die abnehmende Anzahl an fachlich für den Mathematikunterricht ausgebildeten

Grundschullehrkräften. Da in den Grundschulen fachlich qualifiziertes Personal fehlt, wird gegenwärtig zunehmend auf Quereinsteigende und fachfremd unterrichtende Lehrkräfte zurückgegriffen. Das hat zur Konsequenz, dass die Vermittlung inhalts- und prozessbezogener mathematischer Kompetenzen und die Bedeutung fachdidaktischer Prinzipien für guten Mathematikunterricht zu kurz kommen.

Aus dieser Problemlage ergeben sich konkrete Forderungen an die mathematische und mathematikdidaktische Professionalisierung im Lehramt, um die Unterrichtsqualität zu verbessern:

1) Die Ausbildung von Grundschullehrkräften im Fach Mathematik verbessern
2) Eine systematische Fort- und Weiterbildung von Grundschullehrkräften im Fach Mathematik weiter vorantreiben
3) Die Zusammenarbeit von Wissenschaft, Schule und Administration stärken
4) Herausforderungen am Übergang von Primar- zu Sekundarstufe in die Aus- und Fortbildung von Sekundarschullehrkräften einbinden (…)“

Das ganze Positionspapier findet man auf der Website der GDM (*didaktik-der-mathematik.de*). Hier findet man auch ein gemeinsames Positionspapier von GDM, DMV und MNU zum Lehrkräftemangel.

Rätsel-Impuls

Stimmt das???

Die Gleichung $2x-1=\sqrt{x^2-4x+4}$ soll gelöst werden:

$$\begin{aligned} 2x-1&=\sqrt{x^2-4x+4}\\ 2x-1&=\sqrt{(x-2)^2}\\ 2x-1&=x-2\\ x&=-1 \end{aligned}$$

Also: $L=\{-1\}$. Stimmt das???

(Nach einer Idee aus: A. Furdek: Fehler-Beschwörer, 2002)

Literatur-Impuls

Buchbesprechung: Didaktik der Algebra

von Hans-Georg Weigand, Alexander Schüler-Meyer und Guido Pinkernell, Springer 2022

Reinhard Oldenburg, Universität Augsburg

Die elementare Algebra gehört zu den unverzichtbaren Bestandteilen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe I. Jede praktizierende Lehrkraft hat viel Erfahrung damit. Und trotzdem, oder gerade deswegen, kann es nützlich sein, noch mal einen frischen Blick darauf zu werfen, einen Impuls, ihre Tiefe, aber auch die Schönheit, erneut zu durchdenken. Einen hervorragenden Anlass bietet das Buch „Didaktik der Algebra". Anhand der Hauptthemen *Variablen*, *Terme*, *Funktionen* und *Gleichungen* wird das gesamte Gebiet erschlossen. Durchgängig wird dabei herausgearbeitet, welche Grundvorstellungen die Lernenden erwerben sollten. Kontrastierend gibt es viele Informationen zu verbreiteten Fehlvorstellungen und natürlich sehr viele konkrete Ideen für unterrichtliche Aufgaben. Insbesondere wird auch der Einsatz von Technologien (Tabellenkalkulation, GeoGebra, verschiedene Apps) diskutiert und aufgezeigt, wie er zur Entwicklung von Grundvorstellungen beitragen kann. Ohne Zweifel liegt hier ein Standardwerk für die künftige Lehrkräfteausbildung vor, das aber auch praktizierenden Lehrkräften viel zu bieten hat.

Direkt zum Buch:

https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-64660-1

Informations-Impulse

Termine und Informationen

Tag der Mathematik für Schülerinnen und Schüler: 04.03.2023

Mathe-Schüler-Zirkel:

Für Schüler*innen der Jahrgangsstufen 5 bis 13, die Spaß und Freude an Mathematik haben … Zur Anmeldung:

uni-augsburg.de/de/fakultaet/mntf/math/einricht/mathezirkel/

Rent a Prof:

Buchen Sie einen Mathematik-Professor für einen Vortrag an Ihrer Schule zu folgenden Themen: Warum Bienen ein Gespür für Mathematik haben, Die Mathematik hinter der Bildverarbeitung, Ist Chaos zufällig?, u.v.m.!

uni-augsburg.de/de/fakultaet/mntf/math/studium/ studiendekan/rent-a-prof/

impulse digital:

impulse finden Sie auch als digitale Version unter:

https://www.uni-augsburg.de/de/fakultaet/mntf/math/prof/ dida/impulse/

Newsletter:

Wenn Sie regelmäßig Informationen erhalten wollen, z. B. zu **Oberseminar-Terminen**, **Fortbildungen**, … melden Sie sich gerne per Mail an *renate.motzer@uni-a.de.*

impulse wird herausgegeben vom Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik der Universität Augsburg.
Verantwortlicher Ansprechpartner:
Prof. Dr. Reinhard Oldenburg, reinhard.oldenburg@math.uni-augsburg.de

Der Abdruck von GeoGebra-Graphiken wurde durch die GeoGebra GmbH genehmigt. Auflage: 100.