H25-T1-A1

Sei p eine Primzahl, $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen und $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass für die Anzahl der Elemente in G gilt:

$$|G| = p(p-1)^2(p+1).$$

b) Bestimmen Sie die Ordnung des Elements $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

c) Zeigen Sie, dass es mehr als eine p-Sylowgruppe in G gibt.

d) Sei nun speziell $p = 3$ und

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq G.$$

Zeigen Sie, dass der Normalisator $N := \{g \in G \mid g \cdot H = H \cdot g\} \subseteq G$ von H in G aus den oberen Dreiecksmatrizen in G besteht. Folgern Sie, dass G genau vier 3-Sylow-Gruppen besitzt.

Lösung

a) Bekanntermaßen sind 2×2-Matrizen mit Einträgen in einem Körper K (hier $\mathbb{F}_p$) genau dann invertierbar, wenn die Spalten linear unabhängig sind. Betrachten wir also eine 2×2-Matrix $A = (v_1, v_2)$ mit Einträgen in $\mathbb{F}_p$. Demnach hat man für die erste Spalte v_1 exakt $p^2 - 1$ Möglichkeiten (alle Vektoren außer dem 0-Vektor). Der zweite Spaltenvektor v_2 darf nicht linear unabhängig zum ersten sein, das heißt $v_2 \neq a \cdot v_1$ mit $a \in \mathbb{F}_p$. Demnach bleiben, nach der Wahl von v_1 für v_2 noch $p^2 - p$ Möglichkeiten für v_2 übrig, so dass A invertierbar ist. Insgesamt gibt es also $(p^2-1)\cdot(p^2-p) = (p-1)(p+1)\cdot(p-1) = p(p-1)^2(p+1)$ Möglichkeiten.

b) Wir berechnen zunächst für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, die Matrix $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Allgemein erhält man $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Demnäch ist die Ordnung von A gleich p.

c) Nach dem 3. Sylow-Satz gilt für die Anzahl der p-Sylow-Gruppen von G, n_p, dass

$$n_p \equiv 1 (\bmod p), \quad n_p \mid (p-1)^2(p+1).$$

Mit A aus b) wissen wir, dass $\langle A \rangle$ eine p-Sylow-Gruppe in G ist. Demnach gilt $n_p \geq 1$. Nehmen wir also an $n_p = 1$. Demnach wäre $\langle A \rangle$ ein Normalteiler in G. Betrachten wir die Matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\det(B) = -1 \neq 0$ (für alle p). Demnach ist $B^{-1} = -1\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, also $B^{-1} = B$.

Wir berechnen nun $BAB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \langle A \rangle$, da die Element aus $\langle A \rangle$ von der Form $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sind. Demnach ist $\langle A \rangle$ kein Normalteiler, also kann n_p nicht eins sein. Das heißt $n_p > 1$.

d) Hier ist $H = \langle A \rangle$ für $p = 3$. Sei nun $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in N$. Da H eine 3-Sylowgruppe ist (siehe oben) hat H genau 3 Elemente, demnach ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ das eindeutige Inverse zu $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Da $M \in N$ gilt $MAM^{-1} \in H$ sowie $MA^2M^{-1} \in H$ (MM^{-1} ist trivialerweise in H). Wir wissen $M^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Man rechnet also $MAM^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-(a+b)c & -ab+(a+b)a \\ cd-(c+d)c & -bc+(c+d)a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} a(d-c)-bc & a^2 \\ -c^2 & (a-b)c+ad \end{pmatrix}$. Da $MAM^{-1} \in H$ erhält man $\frac{a(d-c)-bc}{ad-bc} = 1 \iff ad - ac - bc = ad - bc \iff ac = 0$. Außerdem bekommt man $\frac{(a-b)c+ad}{ad-bc} = 1 \iff -bc + ac + ad = ad - bc \iff ac = 0$. Angenommen $a = 0$, dann gilt $\det(M) = -bc \neq 0$. Außerdem erhält man $MAM^{-1} = \frac{1}{-bc} \begin{pmatrix} -bc & 0 \\ -c^2 & -bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{b} & 1 \end{pmatrix}$. Damit MAM^{-1} in H ist muss also $c = 0$ gelten, ein Widerspruch zu $-bc \neq 0$. Also ist $a \neq 0$ und demnach $c = 0$. Das heißt M ist eine obere Dreiecksmatrix. Eine ähnliche Rechnung für MA^2M^{-1} zeigt, dass N die oberen Dreiecksmatrizen von G sind. Mit a) wissen wir, dass es $3 \cdot (3-1)^2 \cdot (3+1) = 48$ Elemente in G gibt. Zudem gibt es $p \cdot (p-1)^2$ obere Dreiecksmatrizen in G, also 12 (weil man den Eintrag oben links frei wählen darf und auf der Diagnolen keine 0 stehen darf, sonst ist die Determinante 0). Demnach gibt es $\frac{48}{12} = 4$ 3-Sylow-Gruppen. Dies gilt, denn je zwei 3-Sylowgruppen sind zueinander konjugiert. Betrachtet man die Operation

$$G \times \mathrm{Syl}_5 \to \mathrm{Syl}_5, \quad (C, P) \mapsto CPC^{-1},$$

dann weiß man, dass für Syl_5 (die Menge der 5 Sylowgruppen) diese Operation transitiv ist (2.Sylowsatz). Deshalb gilt $n_3 = |\mathrm{Syl}_5| = (G : G_H)$, wobei G_H die Isotropiegruppe bezüglich H ist. Nach den obigen Berechnungen ist G_H also die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen in G. Demnach ist $(G : G_H) = \frac{48}{12} = 4$.