H24-T2-A5

Gegeben sei das Polynom $f := X^6 - 6 \in \mathbb{Q}[X]$.

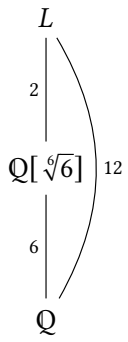
a) Es sei $L \subset \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von f über Q. Bestimmen Sie den Grad $[L : \mathbb{Q}]$.

b) Zeigen Sie, dass $L/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist. Zeigen Sie weiter, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ einen Normalteiler der Ordnung 6 enthält.

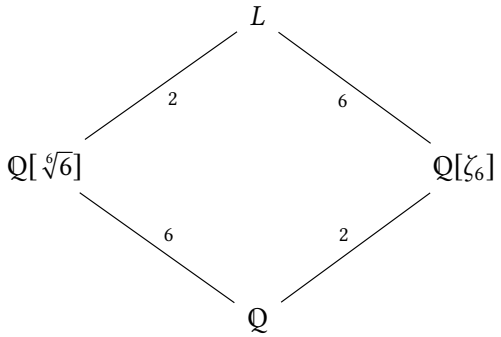
c) Entscheiden Sie begründet, ob die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ abelsch ist.

Lösung

a) Sei ζ_6 eine primitive 6-te Einheitswurzel z.B. $\zeta_6 = \exp\left(\frac{2\pi i}{6}\right)$. Man sieht leicht, dass $L = \mathbb{Q}[\zeta_6, \sqrt[6]{6}]$ gilt. Wir betrachten nun das Polynom f. Dies ist irreduzibel nach Eisenstein ($p = 3$) über $\mathbb{Q}$. Zudem ist es normiert und hat $\sqrt[6]{6}$ als Nullstelle. Demnach ist es das Minimalpolynom von $\sqrt[6]{6}$ über $\mathbb{Q}$. Wir folgern $[\mathbb{Q}[\sqrt[6]{6}] : \mathbb{Q}] = \deg(f) = 6$. Weiter betrachten wir das Polynom Φ_6, welches bekanntlich Grad $\phi(6) = \phi(2)\phi(3) = 2$ hat und irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist. Da $\zeta_6 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist, gilt $[L : \mathbb{Q}[\sqrt[6]{6}] \geq 2$. Da Φ_6 jedoch ein Kandidat für das Minimalpolynom von ζ_6 über $\mathbb{Q}[\sqrt[6]{6}]$ ist und Grad 2 hat, bleibt nur $[L : \mathbb{Q}[\sqrt[6]{6}]] = 2$. Es folgt:



b) Da L der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ ist, ist $L/\mathbb{Q}$ normal. Da $\mathbb{Q}$ perfekt ist, ist $L/\mathbb{Q}$ zudem separabel und demnach galoisch. Wir betrachten nun folgende Situation (Gradformel!)



und die Untergruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(\zeta_6)) \subset \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$. Diese hat 6 Elemente (da $L/\mathbb{Q}(\zeta_6)$ separabel). Sie ist außerdem ein Normalteiler, da sie Index 2 hat, denn $|\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})| = [L : \mathbb{Q}] = 12$ (wiederum da $L/\mathbb{Q}$ separabel).

c) Die Körpererweiterung $\mathbb{Q}[\sqrt[6]{6}]/\mathbb{Q}$ ist nicht normal ($\sqrt[6]{6}\zeta_6 \notin \mathbb{R} \supset \mathbb{Q}[\sqrt[6]{6}]$). Demnach ist nach dem Hauptsatz der Galoistheorie $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}[\sqrt[6]{6}])$ kein Normalteiler von $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$, weshalb $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ nicht abelsch sein kann.