H25-T2-A3

Sei $L \subset \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von $f(X) = X^4 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ über $\mathbb{Q}$.

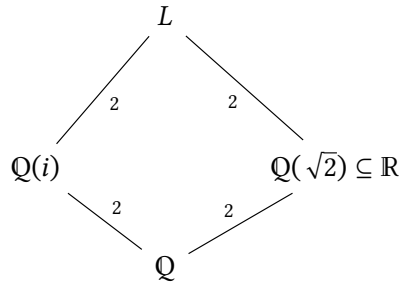
a) Zeigen Sie, dass $L = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass L genau drei Teilkörper vom Grad 2 hat, und geben Sie diese explizit an.

Lösung

a) Die Nullstellen von f in $\mathbb{C}$ sind bekanntlich die primitiven 8-ten Einheitswurzeln $\zeta_8, \zeta_8^3, \zeta_8^5$ und ζ_8^7, mit $\zeta_8 = \exp\left(\frac{2\pi i}{8}\right)$. Demnach ist $L = \mathbb{Q}(\zeta_8)$. Wir behaupten also $\mathbb{Q}(\zeta_8) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$. Hierfür bemerken wir, dass $\zeta_8 = \frac{2}{2}(1 + i)$. Demnach ist $\zeta_8 \in \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$.
Weiter berechnen wir $\zeta_8^2 = i$, wonach $i \in \mathbb{Q}(\zeta_8)$ und weiter $1 + i \in \mathbb{Q}(\zeta_8)$ sowie $\frac{2}{1+i} \cdot \zeta_8 \in \mathbb{Q}(\zeta_8) \iff \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\zeta_8)$. Also $L = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$.

b) Wir betrachten den folgenden Körperturm (alle eingetragenen Details bitte begründen):



Demnach gilt $[L : \mathbb{Q}] = 4$, denn $[L : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = 2$, denn $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{R}$. Da $L \mid \mathbb{Q}$ normal nach a) (da L Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$) und separabel, weil $\mathrm{char}(\mathbb{Q}) = 0$. Demnach ist $L \mid \mathbb{Q}$ eine endliche Galoiserweiterung. Demnach gilt $4 = [L : \mathbb{Q}] = |\mathrm{Gal}(L \mid \mathbb{Q})|$. Also ist entweder $\mathrm{Gal}(L \mid \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ oder $\mathrm{Gal}(L \mid \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Wir geben die Galoisgruppe explizit an (Konstruktion z.B. mit Satz A):

$$\mathrm{Gal}(L \mid \mathbb{Q}) = \{\mathrm{id}; \sigma : \sqrt{2} \mapsto \sqrt{2}, i \mapsto -i; \tau : \sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}, i \mapsto i; \eta : \sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}, i \mapsto -i\}.$$

Da σ, τ, η je Ordnung 2 haben, gilt $\mathrm{Gal}(L \mid \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Diese Gruppe hat genau 3 Untergruppen der Ordnung 2, und nach Haupstatz der Galoistheorie (Voraussetzungen haben wir oben geprüft) gibt es demnach genau 3 echte Zwischenkörper von $L \mid \mathbb{Q}$ vom Grad 2. Wir kennen bereits $\mathbb{Q}(i) \mid \mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \mid \mathbb{Q}$ (siehe das obige Diagramm). Desweiteren gibt es $\mathbb{Q}(i\sqrt{2}) \mid \mathbb{Q}$ (nachprüfen). Das sind dann genau die drei.