H25-T2-A4

Es sei $f \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Es gelte $f(1) = 1$ und $f(2) = 2$.

a) Zeigen Sie, dass $f(a) \equiv 1 (\bmod a-1)$ und $f(a) \equiv 2 (\bmod a-2)$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ mit $a \geq 3$ gilt.

b) Weiter gelte $f(10) > 10$. Zeigen Sie, dass dann $f(10) \geq 82$ gilt.

Lösung

a) Wir schreiben $f(X) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i$ mit $\alpha_i \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten

$$\pi_{a-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/a{-}1\mathbb{Z}, x \mapsto [x], \quad \pi_{a-2} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/a{-}2\mathbb{Z}, x \mapsto [x], \quad \Phi_a : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}, f(X) \mapsto f(a).$$

In $\mathbb{Z}/a-1\mathbb{Z}$ gilt $[f(a)] = 1$ und in $\mathbb{Z}/a-2\mathbb{Z}$ gilt $[f(a)] = 2$. Demnach berechnen wir:

$$\pi_{a-1}\Phi_a(f(X)) = [\sum_{i=0}^{n} \alpha_i a^i] = \sum_{i=0}^{n} [\alpha_i][a]^i = \sum_{i=0}^{n} [\alpha_i] = \pi_{a_1}(f(1)) = [1].$$

Analog zeigt man $f(a) \equiv 2 (\bmod a-2)$.

b) Nach a) gilt $f(10) \equiv 1 (\bmod 9)$ und $f(10) \equiv 2 (\bmod 8)$. Weiter gilt $\mathrm{ggT}(8,9) = 1$ und die Bézout-Darstellung ist $1 = 1 \cdot 9 - 1 \cdot 8$. Nach dem chinesichem Restsatz gilt $\mathbb{Z}/8 \cdot 9\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ mit

$$\Psi : \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/8 \cdot 9\mathbb{Z}, \quad ([x],[y]) \mapsto [9x - 8y],$$

demnach gilt $\Psi([2],[1]) = [10]$ und aus $9 \cdot 8 = 72$ und $f(10) > 10$ folgt $f(10) \geq 82$.