



Pythagoräische Tripel

Mai-Mathetag vom 09.05.2026

Ein Pythagoräisches Tripel ist eine Liste von drei natürlichen Zahlen $[x, y, z]$ mit

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

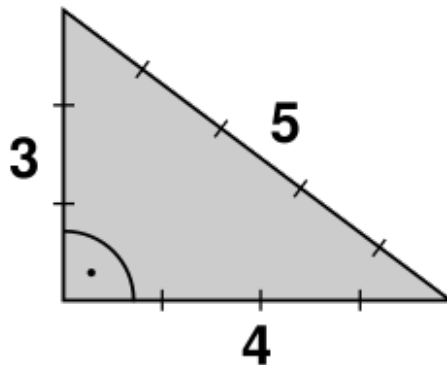


Abbildung 1: Ein rechtwinkliges Dreieck mit den (natürlichen) Seitenlängen 3, 4 und 5. Wenn es ein solches gibt, gilt natürlich der Satz des Pythagoras, d.h. $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Ein Beispiel ist $[3, 4, 5]$, denn $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$. Gibt es noch mehr solcher Zahlen? Ja, und heute wollen wir sie alle finden! Wir müssen uns aber fragen was “alle” heißt. Dazu ein paar Überlegungen

- **Beobachtung 1.** Zwischen $[x, y, z]$ und $[y, x, z]$ sollte kein Unterschied bestehen, da die Rollen von x und y ausgetauscht werden können. Wir betrachten die ersten beiden Einträge also als austauschbar.
- **Beobachtung 2.** Ist $[x, y, z]$ ein pythagoräisches Tripel so ist klarerweise auch für jede natürliche Zahl d die Liste $[d \cdot x, d \cdot y, d \cdot z]$ ein pythagoräisches Tripel. In der Tat

$$(d \cdot x)^2 + (d \cdot y)^2 = d^2 x^2 + d^2 y^2 = d^2(x^2 + y^2) = d^2 z^2 = (d \cdot z)^2.$$

Die pythagoräischen Tripel, die durch eine solche Multiplikation entstehen sind gewissermaßen uninteressant, da sie aus einem bestehenden pythagoräischen Tripel gebaut werden können. Wir wollen uns hier also auf die interessanten pythagoräischen Tripel fokussieren, die wir unten *primitive pythagoräische Tripel* nennen werden.

0.1 Konstruktionsidee

Unsere Konstruktion fußt auf der folgenden Beobachtung: Sind a, b natürliche Zahlen mit $b > a$ so gilt

$$(2ab)^2 + (b^2 - a^2)^2 = (a^2 + b^2)^2. \quad (1)$$

Das rechnet man leicht nach:

$$(2ab)^2 + (b^2 - a^2)^2 = 4a^2b^2 + (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2.$$

Gleichung (1) heißt mit anderen Worten: $[2ab, b^2 - a^2, a^2 + b^2]$ ein pythagoräisches Tripel.

Fazit. Man hat für zwei natürliche Zahlen a und b (mit $a < b$) eine Möglichkeit, ein pythagoräisches Tripel zu konstruieren – nämlich mit der Vorschrift $[2ab, b^2 - a^2, a^2 + b^2]$ (*).

Dazu ein paar Beispiele von pythagoräischen Tripeln, die man für verschiedene Zahlenpaare (a, b) , $a < b$ über Vorschrift (*) erhält

a	b	$[x, y, z]$
1	2	[4,3,5]
1	3	[6,8,10]
2	3	[12,5,13]
1	4	[8,15,17]
3	4	[24,7,25]

Das zeigt schonmal, dass man unendlich viele pythagoräischen Tripeln finden kann. Um das genau zu begründen müsste man allerdings erstmal beweisen, dass für verschiedene Zahlenpaare (a, b) und (a', b') immer unterschiedliche pythagoräische Tripel rauskommen (sonst könnte ja auch einfach immer dasselbe pythagoräische Tripel getroffen werden). Das wollen wir direkt mal besprechen.

Satz 1. *Es seien (a, b) , $a < b$ und (a', b') , $a' < b'$ zwei verschiedene Zahlenpaare. Dann werden mit der Vorschrift (*) verschiedene pythagoräische Tripel erzeugt, d.h. $[2ab, b^2 - a^2, a^2 + b^2] \neq [2a'b', b'^2 - a'^2, a'^2 + b'^2]$.*

(Wir würden hier zwei pythagoräische Tripel gleich nennen, wenn die ersten, zweiten und dritten Einträge miteinander übereinstimmen - das ist also hier nicht der Fall)

Beweis. Angenommen zwei verschiedene Zahlenpaare (a, b) , $a < b$ und (a', b') , $a' < b'$ liefern dasselbe Tripel, nennen wir es $[x, y, z]$ (mit anderen Worten $[x, y, z] = [2ab, b^2 - a^2, a^2 + b^2] = [2a'b', b'^2 - a'^2, a'^2 + b'^2]$). Das heißt

$$\begin{aligned}x &= 2ab = 2a'b', \\y &= b^2 - a^2 = b'^2 - a'^2, \\z &= a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2\end{aligned}$$

Dann gilt

$$y + z = (b^2 - a^2) + (b^2 + a^2) = 2b^2,$$

aber gleichzeitig auch

$$y + z = (b'^2 - a'^2) + (b'^2 + a'^2) = 2b'^2.$$

Mit anderen Worten gilt $2b^2 = 2b'^2$, also auch $b^2 = b'^2$. Da sowohl b als auch b' positive Zahlen sind folgt $b = b'$. Ferner gilt

$$z - y = (a^2 + b^2) - (b^2 - a^2) = 2a^2$$

aber gleichzeitig auch

$$z - y = (a'^2 + b'^2) - (b'^2 - a'^2) = 2a'^2.$$

Mit anderen Worten gilt auch $2a^2 = 2a'^2$, somit wiederum $a^2 = a'^2$. Als Resultat folgt wieder $a = a'$. \square

Es drängt sich nun die Frage auf, ob man so auch alle erdenklichen pythagoräischen Tripel finden kann. Wobei man hier "alle" gleich wieder relativieren muss: Die erste Zahl in der Vorschrift (*) ist immer eine gerade Zahl. Das Tripel $[3, 4, 5]$ kommt deswegen niemals dort raus, weil ja die erste Zahl 3 nicht gerade ist. Vertauscht man aber die ersten beiden Zahlen (vgl. Beobachtung 1), bildet also das Tripel $[4, 3, 5]$ so kommt es mit $a = 1$ und $b = 2$ vor.

0.2 Primitive Pythagoräische Tripel

Beobachtung 2 erlaubt uns, die pythagoräischen Tripel auf solche zu reduzieren, die nicht durch Multiplikation aus einem anderen pythagoräischen Tripel hervorgehen. Dazu folgende Definition:

Definition 1. Wir nennen ein pythagoräisches Tripel $[x, y, z]$ *primitives pythagoräisches Tripel* falls x, y und z keinen gemeinsamen Primfaktor besitzen.

Hätten x, y und z einen gemeinsamen Primfaktor p , d.h. $x = p \cdot \tilde{x}$, $y = p \cdot \tilde{y}$, $z = p \cdot \tilde{z}$ für natürliche Zahlen $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$, so wäre auch $[\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}]$ ein pythagoräisches Tripel. Auf diese Weise können wir alle gemeinsamen Primfaktoren aus der Betrachtung rausnehmen und landen am Ende bei einem primitiven pythagoräischen Tripel. Mit anderen Worten: Jedes Pythagoräische Tripel entsteht aus einem primitiven pythagoräischen Tripel. Wir wollen deswegen nun also nur alle primitiven pythagoräischen Tripel herausfinden.

Aufgabe 1.

Gegeben sind natürliche Zahlen a, b mit $a < b$ und das in (*) konstruierte pythagoräische Tripel $[2ab, b^2 - a^2, b^2 + a^2]$. Ist dies stets ein primitives pythagoräische Tripel?

1 Erste Eigenschaften

Bevor wir die *Konstruktionsvorschrift* aus Abschnitt 0.1 nochmal genauer unter die Lupe nehmen leiten wir einige erste Eigenschaften von (primitiven) pythagoräischen Tripeln her

Satz 2. Gegeben ist ein primitives pythagoräisches Tripel $[x, y, z]$. Dann gilt

$$(i) \text{ ggT}(x, y) = 1, \quad (ii) \text{ ggT}(x, z) = 1, \quad (iii) \text{ ggT}(y, z) = 1.$$

Beweis. Zu (i). Angenommen $\text{ggT}(x, y) > 1$. Dann haben x und y einen gemeinsamen Primfaktor, nennen wir ihn mal p . Insbesondere gilt $x = px_0$ und $y = py_0$ für natürliche Zahlen x_0, y_0 . Man erhält

$$z^2 = x^2 + y^2 = p^2x_0^2 + p^2y_0^2 = p^2(x_0^2 + y_0^2) = p \cdot [p(x_0^2 + y_0^2)].$$

Das heißt p ist ein Primfaktor in z^2 . Somit muss p auch als Primfaktor in z auftauchen. Dann haben x, y und z aber den Primfaktor p gemeinsam. Ein Widerspruch zu Definition 1. Zu (ii). Haben x und z einen gemeinsamen Primfaktor p so gilt $x = px_0$ und $z = pz_0$ für natürliche Zahlen x_0, z_0 . Nun gilt

$$y^2 = z^2 - x^2 = p^2z_0^2 - p^2x_0^2 = p^2(z_0^2 - x_0^2),$$

wodurch p wiederum ein Primfaktor in y^2 (und somit auch in y) ist. Als Resultat hätten wir p wieder als gemeinsamen Primfaktor in x, y und z . Teil (iii) überlasse ich Euch als Übung. \square

Bei der Konstruktionsvorschrift $[2ab, a^2 - b^2, a^2 + b^2]$ fällt auf, dass die erste Zahl immer eine gerade Zahl ist. Sollte ein pythagoräisches Tripel nur aus ungeraden Zahlen bestehen so würde dieses also nicht erreicht werden. Glücklicherweise ist eine der Zahlen x und y immer gerade, nach folgendem

Satz 3. Gegeben ist ein pythagoräisches Tripel $[x, y, z]$. Dann ist mindestens eine der Zahlen x oder y gerade.

Beweis. Nehmen wir mal das Gegenteil an, also x und y sind beide ungerade. Dann sind auch x^2 und y^2 beide ungerade (In der Tat: wäre zum Beispiel x^2 gerade so würde der Primfaktor 2 in x^2 vorkommen. Dann muss er aber auch bereits in x vorkommen). Als Resultat ist $z^2 = x^2 + y^2$ gerade (als Summe zweier ungerader Zahlen). In z^2 muss also der Primfaktor 2 vorkommen. Da in einer Quadratzahl jeder Primfaktor mindestens zweimal vorkommt muss z^2 durch 2^2 teilbar sein. Also: z^2 ist durch 4 teilbar! Wir werden jetzt sehen warum das nicht sein kann. Und zwar so: Da x ungerade ist, bleibt bei der Division durch 2 ein Rest, nämlich Rest 1. Das bedeutet $x = 2k + 1$ für eine natürliche Zahl k . Da auch y ungerade ist, gilt dasselbe für y , mit anderen Worten $y = 2\ell + 1$ für eine natürliche Zahl ℓ . Wir berechnen

$$z^2 = x^2 + y^2 = (2k + 1)^2 + (2\ell + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4\ell^2 + 4\ell + 1 = 4(k^2 + k + \ell^2 + \ell) + 2.$$

Ist diese Zahl wirklich wie oben besprochen durch 4 teilbar? Nein, denn

$$\frac{z^2}{4} = \frac{4(k^2 + k + \ell^2 + \ell) + 2}{4} = (k^2 + k + \ell^2 + \ell) + \frac{1}{2} \quad \text{ist keine natürliche Zahl,}$$

denn wenn $\frac{1}{2}$ auf eine natürliche Zahl addiert wird kann keine natürliche Zahl entstehen. Somit muss die Annahme falsch sein und das bedeutet, dass mindestens eine der beiden Zahlen x und y gerade sein muss. \square

Aufgabe 2.

Beweis: Ist $[x, y, z]$ ein primitives pythagoräisches Tripel so ist *genau* eine der beiden Zahlen x, y gerade.

Gegeben ist nun ein primitives pythagoräisches Tripel $[x, y, z]$. Dann ist nun nach Aufgabe 2 also entweder x oder y gerade (aber niemals beide). Nach Beobachtung 1 können wir im Fall dass x ungerade und y gerade ist auch einfach die Zahlen x, y vertauschen, d.h. $[y, x, z]$ bilden. Dadurch können wir dann immer erreichen, dass die erste Zahl im primitiven pythagoräischen Tripel gerade ist und die zweite ungerade.

Fazit. Um alle primitiven pythagoräischen Tripel zu finden genügt es, diejenigen pythagoräischen Tripel $[x, y, z]$ zu charakterisieren bei denen x gerade und y ungerade ist.

2 Der Satz von Euklid

Jetzt kommen wir zum heutigen Hauptresultat, dem *Satz von Euklid*. Dieser besagt, dass (bis auf Vertauschung) jedes primitive pythagoräische Tripel durch die Konstruktionsvorschrift (*) konstruiert werden kann. Somit haben wir also wirklich alle primitiven pythagoräischen Tripel gefunden!

Satz 4. *Gegeben ist ein primitives pythagoräisches Tripel $[x, y, z]$ mit x gerade und y ungerade. Dann gibt es zwei natürliche Zahlen a, b mit $a < b$ so dass $[x, y, z] = [2ab, b^2 - a^2, a^2 + b^2]$ (in dem Sinne dass alle Zahlen in den Tripeln Stelle für Stelle übereinstimmen).*

Bevor wir diesen Satz beweisen wollen wir nochmals darauf hinweisen, dass wir die Bedingung “ x gerade und y ungerade” immer durch Vertauschung erreichen können (siehe voriger Abschnitt)

Beweis von Satz 4. Nehmen wir uns mal ein pythagoräisches Tripel $[x, y, z]$ mit x gerade und y ungerade. Da nach Satz 2 x und z keinen gemeinsamen Teiler außer 1 haben dürfen, muss auch z ungerade sein. Dividieren wir alle Zahlen x, y, z mit Rest durch 2 so erhalten wir Rest 0 bei x und Rest 1 für y, z . Mit anderen Worten gibt es natürliche Zahlen u, v, w mit

$$x = 2u, \quad y = 2v + 1, \quad z = 2w + 1$$

Wir definieren nun die Zahlen $r = w - v$ und $s = w + v + 1$.

Zwischenbehauptung. r und s sind teilerfremd.

In der Tat: Wäre $d > 1$ ein gemeinsamer Teiler von r und s , so würde d auch $r + s$ und $s - r$ teilen. Jedoch gilt

$$r + s = (w - v) + (w + v + 1) = 2w + 1 = z, \quad s - r = w + v + 1 - (w - v) = 2v + 1 = y.$$

Somit hätten also auch y und z einen gemeinsamen Teiler, was Satz 2 widerspricht. Somit kann es den gemeinsamen Teiler d nicht geben.

Zwischenbehauptung Ende.

Wir berechnen nun

$$\begin{aligned} x^2 &= z^2 - y^2 = (z + y)(z - y) = (2w + 1 + 2v + 1)(2w + 1 - (2v + 1)) \\ &= (2w + 2v + 2)(2w - 2v) = 2 \cdot (w + v + 1) \cdot 2 \cdot (w - v) = 4rs. \end{aligned} \quad (2)$$

Mit anderen Worten $4rs$ ist eine Quadratzahl. Auch gilt $rs = \frac{x^2}{4} = (\frac{x}{2})^2 = u^2$ ist eine Quadratzahl. Insbesondere kommt jeder Primfaktor in rs immer mit einer geraden Vielfachheit vor. Nehmen wir nun als Beispiel einen Primfaktor p der in rs doppelt vorkommt. Dann hätte man normalerweise drei Möglichkeiten: (i) Der Primfaktor kommt in r doppelt und in s gar nicht vor, oder (ii) er kommt in s doppelt und in r gar nicht vor, oder (iii) er kommt in beiden Zahlen r und s einmal vor. Letzteres kann aber nicht sein, denn r und s sind ja teilerfremd! Somit kommt also jeder Primfaktor von rs entweder mit kompletter Vielfachheit in r vor oder mit kompletter Vielfachheit in s . Das bedeutet auch: In beiden Zahlen r und s kommt jeder Primfaktor mit gerader Vielfachheit vor. Und das zeigt, dass sowohl r als auch s Quadratzahlen sind. Wir definieren nun a und b so, dass $r = a^2$ und $s = b^2$. Da $a^2 = r = w - v \leq w < w + v + 1 = s = b^2$ muss gelten, dass $a < b$. Wir wollen nun zeigen, dass $[x, y, z] = [2ab, b^2 - a^2, a^2 + b^2]$. Zunächst zur Gleichheit im ersten Slot. Wir rechnen

$$(2ab)^2 = 4a^2b^2 = 4rs \stackrel{(2)}{=} x^2.$$

Da sowohl x als auch $2ab$ positiv sind folgt $x = 2ab$. Nun zur Gleichheit im zweiten Slot Wir rechnen

$$b^2 - a^2 = s - r = (w + v + 1) - (w - v) = 2v + 1 = y.$$

Ferner gilt

$$(a^2 + b^2)^2 \stackrel{(1)}{=} (2ab)^2 + (b^2 - a^2)^2 = x^2 + y^2 = z^2.$$

Da sowohl z als auch $a^2 + b^2$ positiv sind folgt $z = a^2 + b^2$. Die Behauptung ist gezeigt.

3 Der große Satz von Fermat

Wenn Euch der Zirkel Spaß gemacht hat, interessiert ihr Euch sicher auch für natürliche Zahlen x, y, z mit

$$x^3 + y^3 = z^3 \quad \text{oder} \quad x^4 + y^4 = z^4. \quad (3)$$

Aber leider muss ich Euch enttäuschen: Solche Zahlentripel gibt es nicht!

Satz 5 (Der große Satz von Fermat). *Es sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 3$. Dann besitzt die Gleichung*

$$x^n + y^n = z^n \quad (4)$$

keine Lösung in den natürlichen Zahlen.

Der erste Beweis ist aus dem Jahr 1994 und kommt von Andrew Wiles. Warum ist er nun nach Fermat benannt? Circa 1640 formulierte Fermat den Satz als erster – und zwar in einer Randnotiz in einer Ausgabe des Buches *Arithmetica*. Darunter schrieb er auch, dass er einen “wahrhaft wunderbaren, einfachen Beweis” für den Satz gefunden habe, doch “leider sei der Rand des Buches zu schmal um ihn hier aufzuschreiben”. Dies löste über eine über 300 Jahre lange erfolglose Suche nach diesem “wunderbaren, einfachen” Beweis aus. Der derzeit bekannte Beweis umfasst mehrere Forschungsarbeiten und hunderte Seiten. Leider kann die Menschheit nirgendwo nachlesen was sich Fermat bei diesem wunderbaren Beweis gedacht hat...