H25-T1-A2

Sei p eine Primzahl, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $\mathbb{F}_q$ ein Körper mit $q = p^n$ Elementen.

a) Begründen Sie, warum $\text{ord}\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) = (q-1)^2 q(q+1)$ für die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ über dem Körper $\mathbb{F}_q$ gilt.

b) Begründen Sie, warum $\text{ord}\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q) = (q-1)q(q+1)$ für die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ über dem Körper $\mathbb{F}_q$ gilt.

c) Begründen Sie, warum jede Untergruppe der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ der Ordnung q konjugiert zur Untergruppe

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_q \right\}$$

von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ ist. Begründen Sie, warum H kein Normalteiler in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ ist.

Lösung

a) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ besteht genau aus den invertierbaren 2×2-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{F}_q$. Demnach müssen die Spalten so einer Matrix linear unabhängig sein. Demnach hat man für die erste Spalte v_1 genau $q^2 - 1$ Möglichkeiten (nur nicht der 0-Vektor). Für die zweite Spalte muss man einen Vektor nehmen, der nicht im Unterraum der von v_1 aufgespannt ist liegt. Darin liegen genau q viele, deshalb bleiben für den zweiten Vektor genau $q^2 - q$ Möglichkeiten. Demnach gilt $\text{ord}\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) = (q^2-1)(q^2-q) = (q-1)(q+1)q(q-1) = (q-1)^2 q(q+1)$.

b) Wir erinnern zunächst, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) | \det(A) = 1\}$. Demnach betrachten wir den Gruppenhomorphismus

$$\det : \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \to \mathbb{F}_q^\times, \quad A \mapsto \det(A),$$

mit $\ker(\det) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$. Wir betrachten $A := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{F}_q^\times$ und sehen, dass $\det(A) = a$, demnach ist det ein surjektiver Gruppenhomorphismus. Nach dem Homomorphisatz gilt demnach $\frac{|\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)|}{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)|} = \left|\mathbb{F}_q^\times\right| = q - 1$. Aus a) folgt damit die Behauptung.

c) Offenbar gilt $|H| = q$. Aus b) wissen wir, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ genau $(q-1)q(q+1)$ Elemente besitzt. Wir betrachten die p-Sylowgruppen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$. Da $p \nmid (q-1), (q+1)$ sind die p-Sylowgruppen genau die Untergruppen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ mit q Elemnetn. Demnach ist H eine solche (unter der Prämisse, dass H eine Untergruppe ist, nachrechnen oder der Angabe glauben). Aus dem 2. Sylowsatz folgt dann die Behauptung das jede andere Untergruppe der Ordnung q konjugiert zu H ist. Der zweite Teil der Aufgabe folgt, wenn man sich klar macht, dass

$$\tilde{H} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \mid a \in F_q \right\}$$

ebenfalls eine Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ mit genau q Elementen ist. Da $H \cap \tilde{H} = \{0\}$ sind H und $\tilde{H}$ zwei paarweise verschiedene p-Sylowgruppen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$. Also kann H kein Normalteiler von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ sein.