H24-T2-A4

Im Folgenden sei $R := \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ der Ring der Gauß'schen Zahlen. Ohne Beweis darf benutzt werden, dass dies ein euklidischer Ring bezüglich der Normabbildung

$$N : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}, \quad x + iy \mapsto x^2 + y^2$$

und somit insbesondere ein Hauptidealbereich und ein faktorieller Ring ist.

a) Bestimmen Sie alle $a \in R$ mit $N(a) \leq 5$.

b) Schreiben Sie mithilfe der Teilaufgabe a) jede der ganzen Zahlen aus $\{2, \dots, 6\}$ als Produkt irreduzibler Elemente in R.

c) Bestimmen Sie ein $d \in R$ mit $(d) = (5 + 10i, 1 + 3i)$. Zeigen Sie, dass $R/(d)$ ein Körper ist.

Lösung

a) Sei $a = x + iy \in R$, also $x, y \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $N(a) = x^2 + y^2$. Wir setzen nun $N(a) \leq 5$. Also $x^2 + y^2 \leq 5$. Für $|x|, |y| \geq 3$ ist die Gleichung bereits nicht mehr lösbar, es folgt also $|x|, |y| < 3$. Setzt man $|x| = 2$ so folgt $|y| \leq 1$. Analog mit vertauschten Rollen. Es ergeben sich also folgende Elemente mit Norm ≤ 5: $\{x + iy \in R \mid |x| + |y| \leq 4 \wedge |x|, |y| < 3\}$.

b) Wir bemerken hierzu, dass die Normabbildung multiplikativ ist. Zudem bemerkt man, dass Einheiten von R genau Norm 1 haben. Das zeigt man leicht (siehe Skript!). Wir behaupten weiter, dass alle $a \in R$ mit $N(a) \in \{2, 3, 5\}$ irreduzibel sind. Norm 0 und 1 können wir dabei vernachlässigen, da nur die 0 Norm 0 hat und gerade nur die Einheiten Norm 1 haben. Elemente mit Norm 2, 3 und 5 sind irreduzibel, da 2,3 und 5 prim sind und da N multiplikativ ist, kann es so keine nichttriviale Zerlegung geben. Wir zerlegen nun also unsere ganzen Zahlen in irreduzible Elemente:

$$2 = (1 + i)(1 - i), \quad N(1 \pm i) = 2.$$

$$4 = (1 + i)^2(1 - i)^2, \quad N(1 \pm i) = 2.$$

$$5 = (1 + 2i)(1 - 2i), \quad N(1 \pm 2i) = 5.$$

Weiter beobachtet man, dass 3 bereits irreduzibel ist, da $N(3) = 9$. Eine nichtriviale Zerlegung wäre also eine Zerlegung in zwei Elemente der Norm 3. Es gibt jedoch kein einziges, denn angenommen $x^2 + y^2 = 3$. Dann muss $|x|, |y| < 2$ sein. Aber dann erreicht gilt $x^2 + y^2 \leq 2$. Also gibt es kein Element der Norm 3 und demnach ist 3 irreduzibel. Es folgt nun noch, dass $6 = 2 \cdot 3 = 3(1 + i)(1 - i)$ gilt.

c) Wir betrachten $d = 2 + i$. Es gilt $d = 5 + 10i - 3 \cdot (1 + 3i) \in (5 + 10i, 1 + 3i)$. Außerdem gilt $(2 + i)(1 + i) = 1 + 3i$ und demnach gilt $1 + 3i \in (d)$. Daraus folgt aber auch, dass $5 + 10i =$

$d + 3 \cdot (1 + 3i) \in (d)$. Das zeigt die Gleichheit der Ideale. Da R ein Hauptidealbereich ist, reicht es nun zu zeigen, dass d irreduzibel ist. Es gilt $N(d) = 5$. Wir haben in b) bereits gesehen, dass Elemente der Norm 5 irreduzibel sind. Demnach ist $R/(d)$ ein Körper.

Hinweis zu c): Wie kommt man auf d? → Division mit Rest bezüglich der Normabbildung probieren!