F24-T3-A2

a) Ermitteln Sie die Anzahl der Lösungen der folgenden Gleichungen in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

$$x^5 = 0, \quad x^5 = 1, \quad x^5 = 2, \quad x^5 = 3$$

b) Ermitteln Sie die Anzahl der Lösungen der folgenden Gleichungen in $\mathbb{Z}/2024\mathbb{Z}$.
($2024 = 8 \cdot 11 \cdot 23$)

$$x^5 = 0, \quad x^5 = 1, \quad x^5 = 2, \quad x^5 = 3$$

c) Bestimmen Sie, wie viele fünfte Potenzen es in $\mathbb{Z}/2024\mathbb{Z}$ gibt.

Lösung

a) Mit dem Korrespondenzsatz berechnen wir zunächst die Primideale in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, hier gibt es nur das Primideal $([2])$. Die nilpotenten Elemente in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ sind also $[0], [2], [4], [6]$. Es gilt $[2^3] = [0], [4^2] = [0]$ und $[6^3] = [0]$. Daher sind $[0], [2], [4], [6]$ Lösungen der Gleichung $x^5 = 0$ in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.
Ein $x \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ das $x^5 = 1$ erfüllt ist eine Einheit. Die Einheiten von $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ sind $[1], [3], [5], [7]$. Es gilt $\operatorname{ord}([3]) = 2, \operatorname{ord}([5]) = 2, \operatorname{ord}([7]) = 2 (\in (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times)$. Demnach ist nur $[1]$ eine Lösung der Gleichung $x^5 = 1$ in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.
Wir berechnen jetzt noch $[3]^5, [5]^5$ und $[7]^5$. Es gilt für $y \in \{[3], [5], [7]\}$, dass $y^4 = 1$ demnach ist $[3]^5 = [3], [5]^5 = 5$ und $[7]^5 = [7]$. Die Lösungen der anderen beiden Rechnungen kann man also leicht ablesen.

b) Wir lösen die Gleichungen zunächst in $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/23\mathbb{Z}$, bemerke dazu, dass dies Körper sind. In Körpern gibt es keine Nullteiler außer der 0, daher gibt es in $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/23\mathbb{Z}$ genau eine Lösung der Gleichung $x^5 = 0$.
Zunächst bemerken wir, dass $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times = (\mathbb{F}_p)^\times \cong \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ für eine Primzahl p gilt. Gilt $x^5 = 1 \in \mathbb{F}^\times, \mathbb{F} \in \{\mathbb{F}_{11}, \mathbb{F}_{23}\}$, dann gilt $\operatorname{ord}(x) \mid 5$ und da 5 eine Primzahl ist, muss $\operatorname{ord}(x) \in \{1, 5\}$ gelten. In $\mathbb{F}_{11}^\times$ haben alle Elementen einen Teiler von 10 als Ordnung (Satz von Lagrange) 5 ist also möglich! In $\mathbb{F}_{23}^\times$ haben alle Einheiten einen Teiler von 22 als Ordnung, 5 fällt also heraus. In $\mathbb{Z}/23\mathbb{Z} = \mathbb{F}_{23}$ löst also nur $[1]$ die Gleichung $x^5 = 1$. $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ ist zyklisch, d.h es gibt zu jedem Teiler von 10 genau eine zyklische Untergruppe, d.h es gibt 4 Elemente der Ordnung 5 in $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times$. D.h. in $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ haben wir 5 Lösungen der Gleichung $x^5 = 1$.
Machen wir weiter mit der Gleichung $x^5 = 2$. Angenommen es gibt ein Element a in $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ mit $a^5 = 2$, dann gilt $a^{10} = 2^2 = 1$. 2^2 ist jedoch $4 \in \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. Demnach gibt es kein solches Element. In $(\mathbb{Z}/23\mathbb{Z})^\times$ haben alle Elemente multiplikative Ordnung $1, 2, 11$ oder 22. Das Element mit multiplikativer Ordnung 1 erfüllt die Gleichung nicht. Hat ein Element a multiplikative Ordnung 2 so gilt $a^4 = 1$ also $a^5 = a$. Es gilt aber $2^5 \neq 2$ in $\mathbb{Z}/23\mathbb{Z}$.