H23-T3-A3

Sei L der Zerfällungskörper des Polynoms $f := X^4 - X^3 + 2X^2 - 2$ über $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie

a) für eine Nullstelle $1 \neq \alpha \in L$ von f das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$,

b) den Grad $[L : \mathbb{Q}]$.

Lösung

a) Es gilt $f = (x-1)(x^3 + 2x + 2)$. Seien $\alpha_0 = 1, \alpha_1, \alpha_2$ und α_3 die Nullstellen von f. Definieren wir zudem $g := (x^3 + 2x + 2)$. g ist irreduzibel nach Eisenstein ($p = 2$), normiert und hat α_1, α_2 und α_3 als Nullstellen. Daher ist g das Minimalpolynom von $\alpha_i, \forall i \in \{1, 2, 3\}$, über $\mathbb{Q}$.

b) g hat nur ungerade Exponenten von x und hat nach dem Zwischenwertsatz der Analysis daher eine reelle Nullstelle (oBdA α_1). Betrachten wir daher den Körperturm

$$\begin{array}{c} L \\ | \\ \mathbb{Q}(\alpha_1) \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

wobei nach Teil a) $[\mathbb{Q}(\alpha_1) : \mathbb{Q}] = 3$ gilt. Wie oft in der Literatur bezeichnen wir fortan $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}) := \mathrm{Gal}(f)$. Da $\alpha_0 = 1 \in \mathbb{Q}$ gilt $\mathrm{Gal}(f) = \mathrm{Gal}(g)$ und deshalb $\#\mathrm{Gal}(f) \leq 3! = 6$ (kanonische Einbettung der Galoisgruppe in die $S(n)$). Andererseits gilt $\#\mathrm{Gal}(f) = [L : \mathbb{Q}]$ und da $[\mathbb{Q}(\alpha_1) : \mathbb{Q}] = 3$ und $[\mathbb{Q}(\alpha_1) : \mathbb{Q}] | [L : \mathbb{Q}]$ folgt $3 | [L : \mathbb{Q}]$. Insgesamt bekommt man also $[L : \mathbb{Q}] \in \{3, 6\}$. Betrachten wir nun die formale Ableitung von g, $g' = 3x^2 + 2$. Die Ableitung g' ist größer als 0 für alle $x \in \mathbb{R}$ und daher hat g keine andere reelle Nullstelle als α_1, daher gilt $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ (treten als komplex-konjugiertes Paar auf). Daraus folgt das $\tau \in \mathrm{Gal}(f)$ (mit τ ist die komplexe Konjugation gemeint) Ordnung 2 hat und daher die Galoisgruppe von gerader Ordnung ist (dies folgt aus dem Satz von Lagrange, da $< \tau >$ als Untergruppe von $\mathrm{Gal}(f)$ die Ordnung 2 hat).