F25-T3-A3

a) Zerlegen Sie die Polynome $X^6 - Y^6$ und $X^5Y + X^3Y^3 + XY^5$ im faktoriellen Ring $\mathbb{Q}[X,Y]$ in Primfaktoren.
Hinweis: Es sind jeweils vier Primfaktoren.

b) Finden Sie alle Paare von Polynomen $(f,g) \in \mathbb{Q}[X,Y]^2$ mit

$$f \cdot (X^6 - Y^6) + g \cdot (X^5Y + X^3Y^3 + XY^5) = 0$$

Lösung

a) Mit der binomischen Formel bekommen wir zunächst $X^6 - Y^6 = (X^3 - Y^3)(X^3 + Y^3)$. Weiter bemerkt man, dass $X^3 - Y^3 = (X - Y)(X^2 + XY + Y^2)$ und $X^3 + Y^3 = (X + Y)(X^2 - XY + Y^2)$ gilt. Demnach erhält man

$$X^6 - Y^6 = (X - Y)(X + Y)(X^2 + XY + Y^2)(X^2 - XY + Y^2).$$

Wir zeigen, dass dies alles Primfaktoren sind. Da es sich bei $\mathbb{Q}[X,Y]$ um einen faktoriellen Ring handelt, reicht es zu zeigen, dass die oberen Faktoren jeweils irreduzibel sind. Wir betrachten daher $\mathbb{Q}[X,Y] = (\mathbb{Q}[X])[Y] = (\mathbb{Q}[Y])[X]$. Da sowohl $\mathbb{Q}[X]$ als auch $\mathbb{Q}[Y]$ faktoriell sind, können wir das Eisensteinkriterium bentzen. Demnach ist $(X-Y)$ irreduzibel in $(\mathbb{Q}[X])[Y]$ nach Eisenstein, mit dem Primelement $X \in \mathbb{Q}[X]$, analog natürlich auch $X+Y$. Für die anderen zwei Terme nutzen wir das Nullstellenkriterium. Wir betrachten also $X^2 + XY + Y^2 \in (\mathbb{Q}[Y])[X]$, und mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhalten wir

$$X_{1,2} = \frac{-Y \pm \sqrt{Y^2 - 4Y^2}}{2}.$$

Da -3 kein Quadrat in $\mathbb{Q}[X,Y]$ ist, gibt es keine $X_{1,2} \in \mathbb{Q}[Y]$, sodass $X^2 + XY + Y^2 = (X - X_1)(X - X_2)$. Analog beweist man, dass $(X^2 - XY + Y^2)$ irreduzibel ist.
Das zweite Polynom zerlegt sich in

$$X^5Y + X^3Y^3 + XY^5 = XY(X^2 + XY + Y^2)(X^2 - XY + Y^2).$$

Dass die hinteren beiden Terme irreduzibel in $\mathbb{Q}[X,Y]$ sind haben wir bereits oben gezeigt. Der Beweis der Irreduzibilität von X respektive Y geht z.B. mit dem Eisensteinkriterium.

b) Aus a) folgern wir, dass $h = (X^2 + XY + Y^2)(X^2 - XY + Y^2)$ ein gemeinsamer Teiler der beiden Polynome ist. Aus

$$f \cdot (X^6 - Y^6) + g \cdot (X^5Y + X^3Y^3 + XY^5) = 0$$

folgern wir also mit $h \neq 0$, dass

$$f \cdot (X - Y)(X + Y) + g \cdot XY = 0.$$

Daraus erhalte wir

$$f \cdot (X - Y)(X + Y) = -g \cdot XY.$$

Lösungspaare sind also von der Form $(-q \cdot XY, q \cdot (X - Y)(X + Y))$, mit $q \in \mathbb{Q}[X, Y]$.