H25-T2-A1

a) Für eine Matrix $W \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ sei W^t die transponierte Matrix. Gibt es eine Matrix $W \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, so dass

$$W^t \cdot W = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

gilt? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Es seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Das charakteristische Polynom von A sei gegeben durch

$$\chi_A(X) = X^n + s_1 X^{n-1} + \ldots + s_r X^{n-r}$$

mit $s_1, \ldots, s_r \in \mathbb{R}$ und $s_r \neq 0$. Zeigen Sie, dass der Rang von A gleich r ist.

Lösung

a) Ich erinnere zunächst an den Spektralsatz der linearen Algebra, wonach jede symmetrische Matrix in $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ orthogonal diagonalisierbar ist, d.h. es existiert für jedes $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ ein $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ (orthogonale Matrix = Spalten orthogonal), sodass $A = U^t \Lambda U$, wobei $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A. Beachte, dass $W^t W$ symmetrisch ist (ganz allgemein: für $V \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ ist $V^t V$ stets symmetrisch mit und positiv definit). Da also $W^t W$ positiv definit sein muss, sonst gibt es kein passendes W berechnen wir zunächst die Eigenwerte von $W^t W$, diese lauten $3 \pm 2\sqrt{2}$ und sind demnach beide in $\mathbb{R}_{>0}$.
Nach dem Spektralsatz der linearen Algebra gibt es also ein $U \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, mit $U^t W^t W U = \mathrm{diag}(\lambda_+, \lambda_-)$ mit den Eigenwerten $\lambda_\pm$ von oben. Wir formen um und sehen $(WU)^t WU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Da nun links eine symmetrische und rechts eine Diagonalmatrix stehen, gilt follich $WU = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2})$, also $W = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}) U^t$.

b) Wir klammern X^{n-r} aus und erhalten $\chi_A(X) = X^{n-r}(X^r + s_1 X^{r-1} + \ldots + s_r)$ wobei $s_r \neq 0$. Demnach ist 0 ein Eigenwert von A mit algebraischer Vielfachheit $n - r$. Da A eine symmetrische Matrix ist, folgt mit dem Spektralsatz wiederum, dass A diagonalisierbar ist, d.h. die geoemtrische Vielfachheit von 0 ist ebenfalss $n - r$, also $\dim(\ker(A - 0\mathrm{Id})) = \dim(\ker(A)) = n - r$. Aus dem Rangsatz folgt nun $\mathrm{rk}(A) = n - (n - r) = r$.