H25-T3-A1

a) Zeigen Sie, dass die Gruppen $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ nicht isomorph sind.

b) Zeigen Sie: Falls das Polynom $X^2 + a \in R[X]$ über einem Integritätsbereich R reduzibel ist, so ist $-a$ ein Quadrat in R.

c) Zeigen Sie, dass das Polynom $P = 5X^3 - 10X^2 - \frac{5}{2}X + \frac{5}{3} \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

Lösung

a) Sei $f : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ ein Gruppenisomorphismus. Dann gilt $f(1) = 1$ und aus der Bijektivität folgt $\exists r \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\} : f(r) = i$. Demnach gilt $f(r)^4 = 1 \iff f(r^4) = 1$ und wiederum mit f bijektiv $r^4 = 1$ und $r \neq 1$. Hieraus folgt $r = -1$. Also $f(-1) = i$. Wir erhalten also

$$1 = f(1) = f((-1)^2) = f(-1)f(-1) = i^2 = -1,$$

ein Widerspruch. Demnach kann es so eine Isomorphismus f nicht geben.

b) Da $f = X^2 + a$ reduzibel ist gibt es $g, h \in R[X] \setminus R^*$ mit $f = gh$. Aus Gradgründen haben entweder g, h Grad 1 oder g Grad 2 und h Grad 0 (sonst umnummerieren). Angenommen wir sind im 2ten Fall. Da h f teilt und h Grad 0 hat ist $h \in R$ und $h \mid 1$ also h eine Einheit, ein Widerspruch zur Reduzibilität von f. Demnach folgt f hat eine Nullstelle, also gibt es ein $r \in R$ mit $r^2 + a = 0$, also ist $-a$ ein Quadrat in R.

c) Wir berechnen mit $\frac{6}{5} \cdot P = 6X^3 - 12X^2 - 3X + 2 = \tilde{P}$ ein Polynom mit den selben Nullstellen wie P. Da P Grad 3 hat, müssen wir nur zeigen, dass P, also $\tilde{P}$ keine Nullstellen in $\mathbb{Q}$ hat. Da $\tilde{P}$ ein Polynom in $\mathbb{Z}[X]$ ist muss eine Nullstelle in $\mathbb{Q}$ von $\tilde{P}$ der Form $\alpha = \frac{p}{q}$ und $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$

$$q \mid 6, \quad p \mid 2$$

erfüllen. Wir bekommen also die folgenden Möglichkeiten:

$$p \in \pm\{1, 2, 3, 6\}, \quad p \in \pm\{1, 2\},$$

also sind die möglichen Nullstellen von P bzw. $\tilde{P}$ genau $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm 2, \pm\frac{2}{3}$. Wir setzten diese in P ein und sehen, dass keine eine Nullstelle ist.