H23-T2-A1

Sei $\omega \in \mathbb{C}$ eine primitive dritte Einheitswurzel.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$ eine Galoiserweiterung ist.

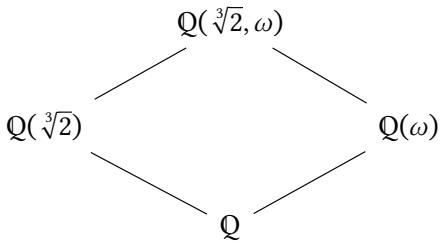
b) Bestimmen Sie den Grad $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega) : \mathbb{Q}]$ dieser Erweiterung.

c) Sei G die Menge der invertierbaren 2×2 Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit Einträgen in $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ($a \neq 0$!!!!) Zeigen Sie, dass G eine Untergruppe der Gruppe der invertierbaren 2×2 Matrizen ist, und geben sie einen Isomorphismus $G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)|\mathbb{Q})$ an.

Lösung

a) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)|\mathbb{Q}$ ist seperabel, da $\mathrm{char}(\mathbb{Q})) = 0$. Zudem ist $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)|\mathbb{Q})$ normal, da $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$ der Zerfällungskörper von $f = X^3 - 2$ ist, dessen Nullstellen $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2} \cdot \omega$ und $\sqrt[3]{2} \cdot \omega^2$ sind.

b) Wir betrachten den folgenden Körperturm:



mit den Körpergraden $[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] = 2$ und $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$ (Minimalpolynome $g = X^2 + X + 1, f = X^3 - 2$). Diese sind auch Kandidaten für die Minalpolynome auf der oberen Ebene (diagonal). Man erhält daher $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega) : \mathbb{Q}(\omega)] \leq 3$ und $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})] \leq 2$. Man setzt $d := [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega) : \mathbb{Q}]$. Aus der Gradformel erhält man $2|d$ und $3|d$ und daher ($\mathrm{ggT}(2,3) = 1$) $6|d$ und deshalb $6 \leq d$. Andererseits erhält man aus der Gradformel $d \leq 6(2 \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega) : \mathbb{Q}(\omega)])$ und deshalb $d = 6$.

c) Für $a = 1$ und $b = 0$ ist $\mathbb{I}_{3\times 3} \in G$. Wir rechnen zudem nach:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

Die bekannte Formel für Inverse 2×2 Matrizen liefert

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = a^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in G.$$

(Beachte $a \neq 0$). Betrachte den Isomorphismus

$$\psi : G \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)|\mathbb{Q}), \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (\sigma_{a,b} : \sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2}\omega^b, \omega \mapsto \omega^a).$$

Bitte nachprüfen, dass das ein wohldefinierter Gruppenisomorphismus ist!